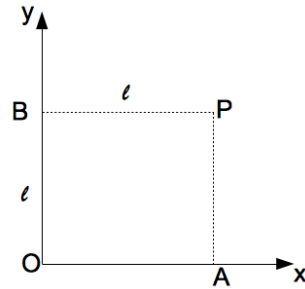


Esercitazione 3

Esercizio 1 - Lavoro

Una particella è sottoposta ad una forza $\vec{F} = axy \hat{u}_x - ax^2 \hat{u}_y$, dove \hat{u}_x e \hat{u}_y sono i versori degli assi x e y e $a = 60 \text{ N/m}^2$. Si calcoli il lavoro compiuto dalla forza \vec{F} quando la particella si sposta dall'origine O al punto P di coordinate $x_P = \ell$, $y_P = \ell$ ($\ell = 0.1 \text{ m}$) lungo le due traiettorie OAP , OBP dove $A = (\ell, 0)$, $B = (0, \ell)$ e $P = (\ell, \ell)$. Stabilire se il campo di forze assegnato sia o meno conservativo.



Soluzione

L'espressione del lavoro L compiuto da una forza \vec{F} lungo un cammino γ è

$$L = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma} (F_x \hat{u}_x + F_y \hat{u}_y) \cdot (dx \hat{u}_x + dy \hat{u}_y)$$

Percorso OAP Lungo il tratto OA , $dy = 0$ e $F_x = 0$; lungo il tratto AP , $dx = 0$ e $F_y = -a\ell^2$. Il lavoro compiuto è

$$L = \int_{OA} F_x dx + \int_{AP} F_y dy = 0 - a\ell^2 \int_0^{\ell} dy = -0.06 \text{ J}$$

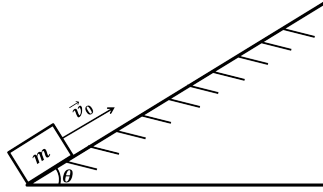
Percorso OBP Lungo il tratto OB , $dx = 0$ e $F_y = 0$; lungo il tratto BP , $dy = 0$ e $F_x = ax\ell$. Il lavoro compiuto è

$$L = \int_{OB} F_y dy + \int_{BP} F_x dx = 0 + a\ell \int_0^{\ell} x dx = 0.03 \text{ J}$$

Poiché il lavoro compiuto dipende dal percorso effettuato, il campo di forze non è conservativo.

Esercizio 2 - Lavoro, attrito, piano inclinato

Un corpo di massa m viene lanciato con velocità iniziale \vec{v}_0 lungo un piano inclinato scabro, con coefficiente di attrito dinamico μ_d , partendo dal bordo inferiore del piano. Sapendo che l'angolo del piano è θ , si calcoli la massima altezza raggiunta dal corpo e il corrispondente lavoro della forza di attrito.



Soluzione

Procedimento 1: Cinematica. Le forze agenti sul corpo sono la forza peso \vec{P} , la forza di attrito \vec{F}_a e la reazione vincolare normale del piano \vec{N} . Proiettiamole su un sistema di assi ortogonali con asse y ortogonale al piano inclinato e orientato verso l'alto, asse x parallelo al piano e orientato verso la sua sommità:

$$\begin{cases} N - mg \cos \theta = 0 \\ ma = -mg \sin \theta - \mu_d N \end{cases} \rightarrow a = -g (\sin \theta + \mu_d \cos \theta)$$

Nota l'accelerazione, la distanza d percorsa dal corpo prima di fermarsi si ricava risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} v_f = 0 = v_0 + at \\ x_f = d = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \end{cases}$$

mentre l'altezza corrispondente è:

$$h = d \sin \theta = \frac{v_0^2}{2g} \frac{\sin \theta}{\sin \theta + \mu_d \cos \theta}$$

Il lavoro compiuto dalla forza di attrito è:

$$L_a = \int_0^d \vec{F}_a \cdot \vec{ds} = -\mu_d mgd \cos \theta$$

Procedimento 2: Teorema energia cinetica. La variazione di energia cinetica ΔK del corpo è pari al lavoro compiuto dalle forze agenti su di esso, conservative e non conservative:

$$\Delta K = -\frac{1}{2} m v_0^2 = L_P + L_a = \int_0^d \vec{P} \cdot \vec{ds} + \int_0^d \vec{F}_a \cdot \vec{ds} \quad (1)$$

dove $L_P = -mgd \sin \theta$ e $L_a = -\mu_d mgd \cos \theta$.

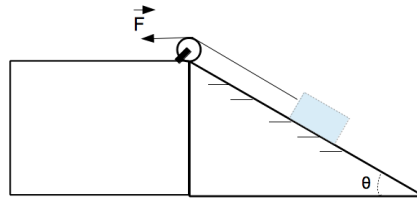
Dalla (1) si ricava d e quindi l'altezza massima raggiunta $h = d \sin \theta$.

Nota: il lavoro della forza peso non dipende dal percorso effettuato, ma solo dalla variazione della quota, passata da 0 ad h :

$$L_P = -mg(d \sin \theta) = -mgh$$

Esercizio 3 - Lavoro, attrito, piano inclinato

Si vuole far salire un corpo di massa $m = 1$ kg lungo un piano inclinato con velocità costante. Tra piano e corpo c'è attrito con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.3$. Che forza è necessario applicare se l'inclinazione del piano è $\theta = 45^\circ$? Che lavoro si compie se il piano è lungo $d = 10$ m? Qual è il lavoro compiuto dalla forza di attrito?



Soluzione

Le forze che agiscono sul corpo sono la forza peso \vec{P} , la forza di attrito \vec{F}_a , la reazione vincolare normale \vec{N} e la forza trainante trasmessa tramite la carrucola \vec{F} . Proiettiamole su un sistema di assi ortogonali con asse y ortogonale al piano inclinato e orientato verso l'alto, asse x parallelo al piano e orientato verso la sommità del piano. Inoltre osserviamo che, se il corpo sale lungo il piano con velocità costante, la sua accelerazione è nulla:

$$\begin{aligned} N - mg \cos \theta &= 0 \\ F - mg \sin \theta - \mu_d mg \cos \theta &= 0 \end{aligned}$$

da cui si ricava $F = 9.018$ N. Il lavoro compiuto è $L_F = Fd = 90.18$ J, poiché forza e spostamento sono paralleli e concordi. Il lavoro compiuto dalla forza di attrito è

$$L_a = \int_0^d \vec{F}_a \cdot \vec{ds} = -\mu_d mgd \cos \theta = -20.81 \text{ J}$$

Per completezza, il lavoro compiuto dalla forza peso è $L_P = -mgd \sin \theta = -69.37$ J. Notiamo infine che $L_F = -(L_P + L_a)$.

Esercizio 4 - Lavoro, attrito, piano inclinato

Un corpo di massa m scivola partendo da fermo lungo un piano inclinato con $\alpha = 42^\circ$. Dopo aver percorso una distanza $d = 4.617$ m, raggiunge una velocità $v = 6.41$ m/s. Calcolare il coefficiente di attrito dinamico μ_d tra il corpo e il piano.

Soluzione

Per il teorema dell'energia cinetica:

$$L_{TOT} = K_f - K_i \quad (2)$$

dove l'energia cinetica iniziale $K_i = 0$, quella finale $K_f = \frac{1}{2}mv^2$ ed il lavoro totale è dato dalla somma del lavoro della forza peso e di quello della forza d'attrito:

$$L_{TOT} = L_P + L_A = mgh - F_A d = mgh - \mu_d mgd \cos \alpha$$

dove $h = d \sin \alpha$.

Sostituendo nella (2) si ottiene:

$$\mu_d = \tan \alpha - \frac{v^2}{2gd \cos \alpha} \simeq 0.61$$

Nota: si può impostare il problema considerando che la variazione di energia meccanica ΔE è data dal lavoro delle forze non conservative: $\Delta E = L_A$ con $\Delta E = \frac{1}{2}mv^2 - mgh$. Quindi lo svolgimento dell'esercizio è identico a quello mostrato a partire dal teorema dell'energia cinetica.

Esercizio 5 - Forza elastica, lavoro, attrito

Un corpo di massa $m = 4$ kg, attaccato ad una molla di costante elastica $k = 327$ N/m, si muove su una guida orizzontale con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.4$. Inizialmente la molla viene allungata di Δx . Calcolare quale deve essere il Δx affinché il corpo torni nell'origine con $v = 0$ senza compiere oscillazioni.

Soluzione

Per tornare nella posizione iniziale senza compiere oscillazioni il corpo deve percorrere una traiettoria rettilinea lunga Δx . Durante questo spostamento, sul corpo agiscono la forza elastica della molla e la forza d'attrito, il cui lavoro è dato rispettivamente da $L_E = \frac{1}{2}k\Delta x^2$ e $L_A = -\mu_d mg\Delta x$.

Per il teorema dell'energia cinetica:

$$L_{TOT} = L_E + L_A = \Delta K = 0$$

dove l'ultima uguaglianza viene dal fatto che il corpo parte ed arriva con velocità nulla. Si ottiene quindi:

$$\frac{1}{2}k\Delta x^2 = \mu_d mg\Delta x \quad (3)$$

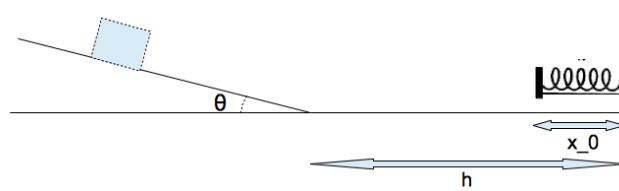
da cui:

$$\Delta x = \frac{2\mu_d mg}{k} = 0.096 \text{ m}$$

Nota: Anche questo problema si può impostare a partire da $\Delta E = L_A$, dove $\Delta E = E_f - E_i = 0 - \frac{1}{2}k\Delta x^2 = -\frac{1}{2}k\Delta x^2$, ottenendo di nuovo la (3).

Esercizio 6 - Forza elastica, lavoro, energia cinetica

Un corpo di massa $m = 60$ kg scivola lungo un piano liscio, inclinato di $\theta = 5^\circ$; esso parte con velocità nulla e percorre lungo il piano la distanza $d = 4$ m. Alla fine del piano inclinato, esso si muove per un tratto orizzontale liscio lungo $h = 2$ m e urta una molla di lunghezza a riposo $x_0 = 0.5$ m, fissata ad un muro. Calcolare quanto deve valere la costante elastica della molla affinché il corpo tocchi il muro con velocità nulla. Ripetere il calcolo se nel tratto orizzontale c'è un coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.14$. Quanto dovrebbe valere μ affinché il corpo arrivi a toccare la molla con velocità nulla?



Soluzione

Procedimento 1: Teorema dell'energia cinetica. La variazione di energia cinetica del corpo è pari al lavoro compiuto dalle forze agenti su di esso. Lungo il tratto inclinato, si ha:

$$\Delta K_1 = L_P \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgd \sin \theta \quad (4)$$

Lungo il tratto orizzontale (poiché la molla viene compressa dal corpo che si muove verso il muro, la forza elastica che agisce sul corpo ha verso opposto allo spostamento):

$$\Delta K_2 = L_{el} \rightarrow 0 - \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}kx_0^2 \quad (5)$$

Ricavando v dalla (4) e sostituendo nella (5), si ottiene $k = 1641.60$ N/m.

In presenza di attrito, la variazione di energia cinetica lungo il tratto orizzontale è dovuta sia al lavoro della forza elastica che a quello dissipativo della forza di attrito:

$$\Delta K_2 = L_{el} + L_a \rightarrow 0 - \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}kx_0^2 - \mu_d mgh$$

Procedendo come in precedenza, si ricava $k = 323.14$ N/m.

Se il corpo arriva a toccare la molla con velocità nulla (cioè non arriva a toccare il muro, ma si ferma prima, lasciando la molla alla sua lunghezza di equilibrio), tutta la sua energia cinetica sarà stata dissipata dalla forza di attrito:

$$\Delta K_2 = L_a \rightarrow 0 - \frac{1}{2}mv^2 = -\mu'_d mg(h - x_0)$$

e, nota v dalla (4), si ricava $\mu'_d = 0.2324$.

Procedimento 2: Conservazione dell'energia. In assenza di attrito, le forze in gioco sono tutte conservative. L'energia potenziale iniziale posseduta dal corpo la ritroviamo, una volta toccato il muro, come energia potenziale elastica:

$$E_i = E_f \rightarrow mgd \sin \theta = \frac{1}{2}kx_0^2$$

da cui si ottiene $k = 1641.60$ N/m. In presenza di attrito, l'energia non è conservata e la sua variazione è pari al lavoro compiuto dalla forza di attrito:

$$E_f - E_i = L_a \rightarrow \frac{1}{2}kx_0^2 - mgd \sin \theta = -\mu_d mgh$$

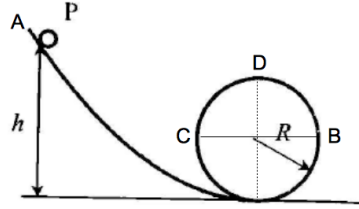
per cui $k = 323.14$ N/m. Se il corpo arriva a toccare la molla con velocità nulla, tutta l'energia è dissipata dalla forza di attrito:

$$E_f - E_i = L_a \rightarrow 0 - mgd \sin \theta = -\mu'_d mgh$$

da cui $\mu'_d = 0.2324$.

Esercizio 7 - Conservazione energia e moto circolare

Un punto materiale di massa $m = 26 \cdot 10^{-3}$ kg parte dal punto A con velocità iniziale nulla e scivola lungo una guida liscia raccordata tangenzialmente con una guida circolare liscia, posta in un piano verticale e di raggio $R = 12$ cm, restando sempre all'interno. Calcolare la minima altezza h per cui il punto arriva in D senza staccarsi e la forza totale agente su di esso quando, partendo dall'altezza h , passa nei punti B e C posti sul diametro orizzontale.



Soluzione

Procedimento 1: Conservazione energia. L'energia si conserva perché non siamo in presenza di forze dissipative. In particolare, possiamo eguagliare l'energia iniziale (solo potenziale, in quanto il corpo parte da fermo) con l'energia meccanica totale nel punto D:

$$E_i = E_D \rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mg2R \quad (6)$$

La velocità nel punto D si ricava dalle equazioni del moto. In ogni punto della guida circolare e lungo la direzione radiale, la pallina è soggetta all'azione della reazione vincolare \vec{N} e della componente radiale della forza peso $\vec{F}_{\text{rad}} = mg \cos \theta$, dove θ è l'angolo compreso tra il raggio R e la verticale. Nel punto D ($\theta = \pi$) entrambe le forze sono dirette verso il centro della guida:

$$mg + N = m \frac{v^2}{R} \rightarrow v^2 = Rg + \frac{RN}{m}$$

Poiché siamo interessati alla quota minima h , imponiamo che la pallina raggiunga il punto D con la minima velocità necessaria a mantenerla in rotazione. Dall'equazione precedente, si vede che questa condizione è verificata per $N = 0$, da cui $v^2 = Rg$. Sostituendo nella (6), si ottiene $h = \frac{5}{2}R$.

La forza totale agente in ogni punto della guida è $\vec{F} = \vec{P} + \vec{N}$. Nei punti B e C, la forza peso ha solo componente tangenziale $\vec{P}_{\text{tan}} = m\vec{g}$ diretta verso il basso. In direzione radiale agisce la reazione vincolare della guida, che mantiene la pallina in rotazione:

$$N = m \frac{v^2}{R}$$

La velocità si ricava di nuovo dalla conservazione dell'energia:

$$E_i = E_{B,C} \rightarrow mg \frac{5}{2}R = \frac{1}{2}mv^2 + mgR$$

da cui $v^2 = 3gR$ (abbiamo sostituito $h = \frac{5}{2}R$). Infine:

$$|\vec{F}| = \sqrt{(mg)^2 + (3mg)^2} = \sqrt{10}mg$$

Procedimento 2: Teorema energia cinetica e lavoro. La quota h può essere ricavata anche osservando che la variazione di energia cinetica del corpo è pari al lavoro compiuto dalle forze agenti. In particolare, dal lavoro della forza peso (la reazione vincolare è sempre ortogonale allo spostamento). Ora, la forza peso è conservativa, per cui il suo lavoro dipende dalla variazione di quota del corpo, che passa dall'altezza h in cima alla guida all'altezza $2R$ nel punto D:

$$K_f - K_i = L_P \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mg(h - 2R)$$

Il lavoro è positivo, perché la quota si riduce (forza e spostamento concordi). Da qui si procede come nel procedimento 1.

Esercizio 8 - Tensione del pendolo

Un pendolo semplice è costituito da una pallina sospesa ad un filo inestensibile di massa trascurabile e lunghezza L . Nel punto più basso della traiettoria la velocità della pallina è $v_0 = \sqrt{3gL}$. Si calcoli la tensione del filo in funzione dell'angolo θ formato da esso con la verticale. Si dica, giustificando la risposta, se il filo rimane teso durante tutto il moto della pallina.

Soluzione

Sulla pallina agiscono la forza peso \vec{P} e la tensione del filo \vec{T} . La tensione ha sempre direzione radiale centripeta e deve soddisfare la condizione $T \geq 0$, altrimenti la massa abbandonerebbe il moto circolare, seguendo una traiettoria parabolica. La forza peso ha componenti $\vec{P}_{\text{rad}} = -mg \cos \theta$ e $\vec{P}_{\text{tan}} = -mg \sin \theta$. L'equazione del moto lungo l'asse radiale è quindi:

$$T(\theta) - mg \cos \theta = m \frac{v^2(\theta)}{L} \quad (7)$$

Per esprimere la tensione in funzione dell'angolo è quindi necessaria un'espressione per $v(\theta)$.

Procedimento 1: Teorema dell'energia cinetica. La variazione di energia cinetica è pari al lavoro compiuto dalla forza peso, quando la quota h della pallina varia da $h_0 = 0$ (pendolo in posizione verticale) a $h(\theta) = L(1 - \cos \theta)$:

$$\Delta K = L_P \rightarrow \frac{1}{2}mv^2(\theta) - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgL(1 - \cos \theta) \quad (8)$$

Procedimento 2: Conservazione dell'energia. L'energia meccanica si conserva durante il moto, quindi il suo valore è sempre pari a quello dell'energia meccanica E_0 nella posizione verticale:

$$E_0 = E(\theta) \rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2(\theta) + mgL(1 - \cos \theta) \quad (9)$$

La (8) e la (9) sono equivalenti, da esse si ricava l'espressione $v(\theta)$ da sostituire nella (7):

$$T(\theta) = m \frac{v_0^2}{L} + mg(3 \cos \theta - 2) = mg(1 + 3 \cos \theta)$$

Risolvendo $T(\theta) = 0$, si ricava l'angolo θ^* in cui il vincolo sulla tensione non è più rispettato: $\cos \theta^* = -\frac{1}{3}$.

Nota: un altro vincolo da rispettare durante il moto è $v^2 \geq 0$. Il caso $v^2 = 0$ corrisponde all'inversione del moto del pendolo. Dalla (8) o dalla (9):

$$v^2 = v_0^2 - 2mgL(1 - \cos \theta) \geq 0 \quad (10)$$

Si ottengono così i due angoli θ_T e θ_v in corrispondenza dei quali si annullano tensione e velocità rispettivamente:

$$\begin{aligned} \cos \theta_v &= \left(1 - \frac{v_0^2}{2gL}\right) \\ \cos \theta_T &= \frac{1}{3} \left(2 - \frac{v_0^2}{gL}\right) = \frac{2}{3} \cos \theta_v \end{aligned} \quad (11)$$

Ovviamente, il moto deve invertirsi prima che ceda la tensione del filo: $\theta_v < \theta_T$, cioè $\cos \theta_v > \cos \theta_T$ (siamo nell'intervallo $[0, \pi]$). Dalla (11), questa condizione è sempre verificata, purché $\theta_v \leq \pi/2$. In altre parole, se la massa non è dotata di una velocità sufficiente a farle compiere un giro completo, o l'inversione del moto avviene prima del raggiungimento della posizione orizzontale o la fune perde tensione e la massa precipita in moto parabolico.

Possiamo calcolare la velocità minima necessaria affinché la massa possa compiere un giro completo. Tale velocità è quella che si ottiene in assenza di tensione nel punto più alto:

$$mg = m \frac{v^2}{L} = m \frac{v_0^2}{L} - 4mgL$$

dove si è usata la (10). La velocità minima è dunque $v_0 = \sqrt{5gL}$.

Esercizio 9 - Tensione del pendolo, giro della morte

Un pendolo semplice è costituito da una pallina di massa $m = 2.0$ kg sospesa ad un filo inestensibile di massa trascurabile e lunghezza $L = 80$ cm. Si trovi la minima velocità che deve avere la pallina nel punto più alto della traiettoria affinché essa continui a seguire la traiettoria circolare invece di cadere verso il basso.

Indichiamo con θ l'angolo formato dal filo con la verticale e supponiamo che la pallina transiti in $\theta = \pi/2$ con velocità v_0 . Calcolare, in funzione di v_0 , la massima altezza che la pallina può raggiungere prima di cadere verso il basso.

Soluzione

Nel punto più alto, la componente radiale dell'equazione del moto si scrive:

$$T + mg = \frac{mv^2}{L}$$

quindi, affinché la pallina continui a seguire la traiettoria circolare, deve essere verificata la condizione $T \geq 0$: $v \geq v_{\min} = \sqrt{gL}$.

Per trovare l'angolo θ^* in corrispondenza del quale avviene il distacco, procediamo come nel problema precedente: scriviamo la componente radiale dell'equazione del moto e la legge di conservazione dell'energia per un generico θ , mettiamo a sistema per ottenere $T = T(\theta)$ ed imponiamo la condizione di distacco, cioè $T = 0$.

$$\begin{cases} T - mg \cos \theta = \frac{mv^2}{L} \\ \frac{1}{2}mv_0^2 + mgL = \frac{1}{2}mv^2 + mgL(1 - \cos \theta) \end{cases} \quad (12)$$

da cui si ottiene

$$T(\theta) = \frac{mv_0^2}{L} + 3mg \cos \theta \rightarrow \cos \theta^* = -\frac{v_0^2}{3gL}$$

Il coseno è negativo, cioè il distacco avviene per $\theta^* > \frac{\pi}{2}$. Definiamo $\alpha = \theta^* - \frac{\pi}{2}$. L'altezza a cui avviene il distacco è allora $h_d = L(1 + \sin \alpha)$.

Dopo il distacco, la pallina segue un moto parabolico. Possiamo calcolare la velocità iniziale del moto sostituendo θ^* nella seconda delle (12): $v_{\text{in}} = v_0/\sqrt{3}$. Definiamo un sistema di assi cartesiani x, y con origine nel punto di distacco. In questo modo, il vettore \vec{v}_{in} forma un angolo α con l'asse y . Le componenti della velocità iniziale sono:

$$\begin{aligned} v_x &= -v_{\text{in}} \sin \alpha \\ v_y &= v_{\text{in}} \cos \alpha \end{aligned}$$

L'altezza massima h_p raggiunta durante il moto parabolico si ottiene dalla conservazione dell'energia (o da ragionamenti cinematici):

$$\frac{1}{2}mv_{\text{in}}^2 = mgh_p + \frac{1}{2}mv_x^2 \rightarrow h_p = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{3g} \cos^2 \alpha$$

Infine, l'altezza massima raggiunta dalla pallina è:

$$\begin{aligned} h_{\text{tot}} &= h_d + h_p = \\ &= L(1 + \sin \alpha) + \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{3g} \cos^2 \alpha = \\ &= L(1 - \cos \theta^*) + \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{3g} \cos^2 \alpha \end{aligned}$$