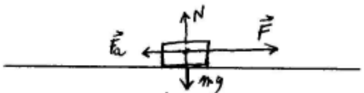
Esercitazione 4

Esercizio 1 - Attrito

Un blocco di massa $m = 2$ kg è posto su un piano orizzontale scabro. Una forza avente direzione orizzontale e modulo costante $F = 20$ N agisce sul blocco, inizialmente fermo, dall'istante $t_0 = 0$ all'istante $t_1 = 10$ s. Cessata l'azione della forza, il blocco rallenta fermandosi all'istante $t_2 = 25$ s. Si calcoli il coefficiente d'attrito dinamico tra il blocco e il piano.

Soluzione



$0 < t \leq 10s$

$$\vec{F} - \vec{F_a} = m\vec{a_1}$$

$$F - \mu_d m g = m a_1$$

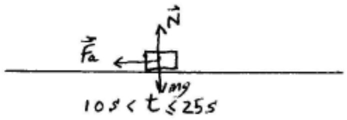
$$a_1 > 0$$

$$a_1 = \frac{F - \mu_d m g}{m} = \frac{F}{m} - \mu_d g$$

$$v_1(t) = v_{01} + a_1 \cdot t = a_1 t$$

$$v_1(10) = \left(\frac{F}{m} - \mu_d g\right) \cdot 10 = (10 - \mu_d \cdot 9'81) \cdot 10 \ m/s$$

$$v_1(t{=}10) = (100 - 98'1 \cdot \mu_d) \ m/s$$



$10s < t \leq 25s$

$$\vec{F_a} = m\vec{a_2}$$

$$-\mu_d m g = m a_2$$

$$a_2 < 0$$

$$a_2 = -\mu_d g$$

$$v_2(t) = v_{02} - \mu_d g (t - 10)$$

$$v_{02} = v_1(10) = 100 - 98'1 \mu_d$$

$$v_2(t{=}25s) = 0$$

$$\downarrow$$

$$100 - 98'1 \mu_d = 9'81 \cdot \mu_d \cdot 15$$

$$\mu_d (98'1 + 9'81 \cdot 15) = 100$$

$$\boxed{\mu_d = \frac{100}{245'25} = 0{,}4077}$$

Possiamo risolvere questo problema utilizzando il teorema del impulso

$$I = \int_{t_0}^{t_2} \vec{F}_{tor} \, dt = m(v_f - v_i)$$

Siccome la velocità iniziale e quella finale sono zero $\rightarrow$ $v_f - v_i = 0 \rightarrow I = 0$

$$I = \int_{t_0}^{t_2} F_{tord} \, t = 0 = \int_{t_0}^{t_1} (F - \mu_d m g) \, dt + \int_{t_0}^{t_2} (-\mu_d m g) \, dt = F(t_1 - t_0) - \mu_d m g (t_2 - t_0)$$

$$\mu_d = \frac{F(t_1 - t_0)}{m g (t_2 - t_0)} = \frac{20N \cdot 10s}{2kg \cdot 9'81 m/s^2 \cdot 25s} = \underline{\underline{0{,}4077}}$$

Esercizio 2 - Potenza
Una forza $\vec{F} = \vec{F}(t)$ agente su un corpo puntiforme di massa m, ne causa il moto descritto dalle seguenti equazioni parametriche: $x(t) = c_1 t^3$, $y(t) = c_2 t^2$, $z(t) = c_3 t$, dove c_1, c_2 e c_3 sono delle costanti. Si determini la potenza sviluppata dalla suddetta forza applicata.

Soluzione

$$\vec{r} = c_1 t^3 \vec{u}_x + c_2 t^2 \vec{u}_y + c_3 t \vec{u}_z$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = 3c_1 t^2 \vec{u}_x + 2c_2 t \vec{u}_y + c_3 \vec{u}_z$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = 6c_1 t \vec{u}_x + 2c_2 \vec{u}_y$$

$$\vec{F}(t) = m\vec{a}(t) = m(6c_1 t \vec{u}_x + 2c_2 \vec{u}_y)$$

$$P = \frac{\delta L}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$P = m(18c_1^2 t^3 + 4c_2^2 t)$$

Esercizio 3 - Lavoro, attrito, piano inclinato

Ad un blocco di massa $m = 4.8$ kg, che si trova su un piano inclinato di un angolo $\theta = 38°$ rispetto all'orizzontale, è applicata la forza $\vec{F}$, di modulo $F = 47$ N diretta orizzontalmente. Il coefficiente di attrito dinamico fra il blocco ed il piano inclinato è $\mu_d = 0.33$ ($\mu_s > \mu_d$). Inizialmente il blocco è in moto lungo il piano inclinato verso l'alto con velocità di modulo $v_0 = 4.3$ m/s. Successivamente il blocco rallenta fino a fermarsi dopo un intervallo di tempo T. Calcolare:

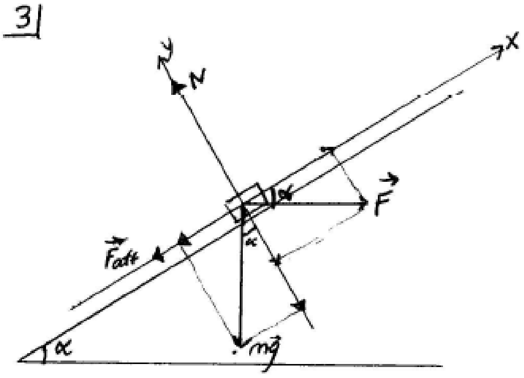
a. la lunghezza dello spostamento del blocco fino all'istante $t = T$;

b. il lavoro della forza totale agente sul blocco nell'intervallo di tempo T;

c. modulo, direzione e verso della forza d'attrito scatico che agisce il piano esercita sul blocco nell'instante $t = T$, in cui il blocco si ferma.

Soluzione

3)



asse x

$$F\cos\alpha - mg\,\text{sen}\,\alpha - \mu_d N = ma \qquad (1)$$

asse y

$$-F\,\text{sen}\,\alpha - mg\cos\alpha + N = 0$$

$$\rightarrow N = F\,\text{sen}\,\alpha + mg\cos\alpha \qquad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow \quad a = \frac{1}{m}\left(F\cos\alpha - mg\,\text{sen}\,\alpha - \mu_d\,(F\,\text{sen}\,\alpha + mg\cos\alpha)\right)$$

$$a = -2{,}87 \text{ m/s}^2$$

$$a = \frac{v_F - v_i}{T} = \frac{0 - v_i}{T} \rightarrow T = \frac{-v_i}{a} = 1{,}5 \text{ s}$$

$$X(t) = x_0 + v_{INI}\,t - \frac{1}{2}a t^2 \Big\} \; X(t) = v_{INI}\,t - \frac{1}{2} a t^2$$

$$x_0 = 0$$

$$\boxed{X(T) = 3{,}22 \text{ m}}$$

ii)

$$\vec{F}_T = \left[F\cos\alpha - mg\,sen\,\alpha - \mu_d\,(F\,sen\,\alpha + mg\cos\alpha)\right]\vec{u}_x = -13,79\,N\,\vec{u}_x$$

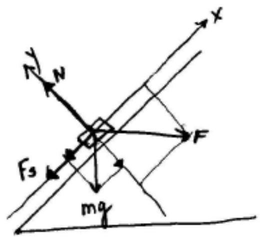
$$\vec{r} = 3,22\,m\,\vec{u}_x$$

$$L_T = \vec{F}\cdot\vec{r} = -13,79\cdot 3,22\ N\cdot m = -44,4\,J$$

Usando il teorema dell'energia cinetica

$$L_T = E_{cf} - E_{ci} = 0 - \frac{1}{2} m v_{M_1}^2 = -44,4\,J$$

iii)



asse y → in equilibrio $N = F\,sen\,\alpha + mg\cos\alpha = 66,05\,N$

asse x

$$F\cos\alpha - mg\,sen\,\alpha - F_s = 0$$

consideriamo che F_s è diretto verso il basso, ma ancora non lo sappiamo. Se risulta un valore $F_s < 0$ sarebbe verso l'alto

$$F_s = F\cos\alpha - mg\,sen\,\alpha = 8\,N$$

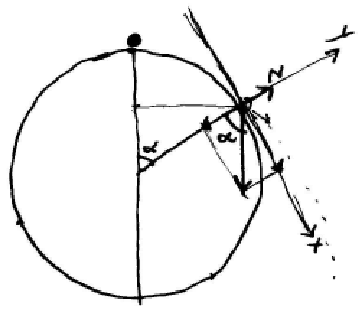
si verifica $F_s < \mu_s N$

$$\mu_s N \geq \mu_d N = 0,33\cdot 66,05\,N = 21,8\,N$$

Esercizio 4
Un corpo puntiforme viene lasciato scivolare, partendo da fermo, sulla sommità di una superficie cilindrica liscia di raggio R. Si calcoli l'angolo α in corrispondenza del quale il corpo si stacca dal cilindro.

Soluzione

4)



asse x

$$mg\,\mathrm{sen}\,\alpha = m a_t = m\frac{d|\vec{v}|}{dt}$$

asse y

$$mg\cos\alpha - N = m a_c = m\frac{v^2}{R}$$

Quando il corpo si stacca dal cilindro $N=0$

$$mg\cos\alpha_0 = m\frac{v^2}{R} \rightarrow \cos\alpha_0 = \frac{v^2}{gR} \quad ; \quad v^2 = gR\cos\alpha_0 \qquad (1)$$

usando il Teorema di Conservazione dell'energia:

$$E_i = E_{pi} + E_{ci} = mg\,2R + \frac{1}{2}mv_i^2 = mg2R \qquad (v_i = 0)$$

$$E_f = E_{pf} + E_{cf} = mgR(1+\cos\alpha_0) + \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_i = E_f \rightarrow \quad mg2R = mgR(1+\cos\alpha_0) + \frac{1}{2}mv^2 \qquad (2)$$

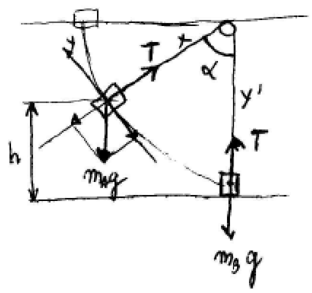
$$(1),(2) \rightarrow \quad 2 = 1 + \cos\alpha_0 + \frac{1}{2}\cos\alpha_0 \rightarrow \cos\alpha_0 = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{\alpha_0 = 48{,}19^\circ}$$

Esercizio 5

Un corpo A di massa $m_A = 2$ kg è collegato tramite una fune ideale, di lunghezza $2l = 4$ m, ad un corpo B di massa $m_B = 3$ kg tramite una carrucola O. Inizialmente il corpo B è appoggiato su un piano orizzontale ed il tratto del filo OB è verticale, mentre il corpo A, in quiete, è tenuto col tratto di filo OA teso ed orizzontale. Si lascia libero il corpo A. Si determini di quanto si abbassa il corpo A, in verticale, prima che il corpo B si stacchi dal piano d'appoggio.

Soluzione



L'equazione del moto circolare del corpo A, proiettata sull'asse radiale è:

$$T - m_A g \cos\alpha = m_A \frac{v_A^2}{l}$$

Inoltre, per la conservazione dell'energia meccanica durante il moto del corpo A:

$$\frac{1}{2} m_A v_A^2 + m_A g h = m_A g l$$

dove $h = l(1 - \cos\alpha)$. Da quest'ultima si ricava un'espressione per v_A che sostituita nella prima equazione dà:

$$T = 3 m_A g \cos\alpha$$

Il corpo B si stacca dal piano d'appoggio quando $T = m_B g$, quindi:

$$3 m_A g \cos\alpha = m_B g$$

da cui $\cos\alpha = \frac{1}{3}\frac{m_B}{m_A}$. Sostituendo i dati si ottiene $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ e quindi $\alpha = 60°$. Il corpo A è quindi sceso di $l - h = l\cos\alpha = 1$ m.

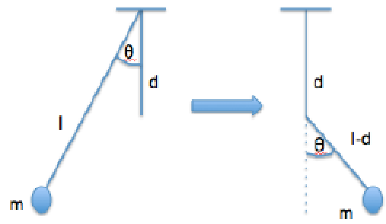
Esercizio 6 - Pendolo a due lunghezze

Consideriamo un punto materiale di massa m vincolato all'estremità di una corda di lunghezza l inizialmente fermo in corrispondenza di un piccolo angolo θ_0 alla sinistra della verticale. Alla destra si trova un piano verticale di altezza $d < l$, che ha l'effetto pratico di accorciare la lunghezza della corda, quando questa oscilla sul lato destro. Utilizzando la conservazioone dell'energia, si determini:

a. la velocità angolare ω_0 del punto materiale quando $\theta = 0$ per la prima volta;

b. l'angolo massimo θ_1 che si ha sul lato destro in corrispondenza della massima ampiezza;

c. la velocità angolare ω_1 del punto materiale quando $\theta = 0$ per la seconda volta.



Soluzione

a. l'energia potenziale all'inizio del moto ($\theta = \theta_0$) è pari all'energia cinetica in $\theta = 0$:

$$mgl(1 - \cos\theta_0) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 l^2 \quad \rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{l}(1 - \cos\theta_0)}$$

b. l'energia potenziale in $\theta = \theta_0$ è pari all'energia potenziale in $\theta = \theta_1$:

$$mgl(1 - \cos\theta_0) = mg(l - d)(1 - \cos\theta_1) \quad \rightarrow \quad \theta_1 = \arccos\left[1 - \frac{l}{l - d}(1 - \cos\theta_0)\right]$$

c. l'energia potenziale in $\theta = \theta_0$ è pari all'energia cinetica in $\theta = 0$; questa volta però $v_1 = \omega_1(l - d)$:

$$mgl(1 - \cos\theta_0) = \frac{1}{2}m\omega_1^2(l - d)^2 \quad \rightarrow \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{2gl}{(l - d)^2}(1 - \cos\theta_0)} = \frac{l}{l - d}\omega_0$$

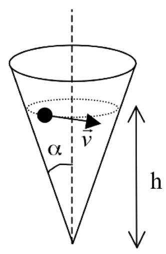
Nota: nel limite delle piccole oscillazioni è possibile sviluppare $\cos\theta$ in serie di Taylor:

$$\cos\theta \simeq 1 - \frac{1}{2}\theta^2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \omega_0 \simeq \theta_0\sqrt{\frac{g}{l}} \\ \theta_1 \simeq \arccos\left[1 - \frac{1}{2}\frac{l}{l-d}\theta_0^2\right] \\ \omega_1 = \sqrt{\frac{2g}{l-d}(1 - \cos\theta_1)} \simeq \theta_1\sqrt{\frac{g}{l-d}} \end{cases}$$

Esercizio 7 - Imbuto

Sulla parete interna di un imbuto ($\alpha = 20°$) può scivolare senza attrito una pallina puntiforme di massa $m = 0.1$ kg. Se la pallina compie una traiettoria circolare orizzontale di velocità uniforme ad una quota $h = 10$ cm dal vertice inferionre dell'imbuto (vedi figura) calcolare:

a. la reazione vincolare N dell'imbuto sulla pallina;
b. la velocità v della pallina;
c. l'accelerazione tengenziale e centripata della pallina.



Soluzione

Nel sistema di riferimento con origine nella pallina, asse x diretto lungo il raggio della traiettoria circolare ed asse y verticale le equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} m\frac{v^2}{R} = N\cos\alpha \\ N\sin\alpha - mg = 0 \end{cases} \tag{1}$$

dove $R = h\tan\alpha$ è il raggio della traiettoria circolare.

a. la reazione vincolare si ricava dalla seconda delle (1): $N = \frac{mg}{\sin\alpha}$;

b. la velocità si ricava dalla prima delle (1), sostituendo l'espressione per N appena ricavata: $v = \sqrt{gh}$;

c. l'accelerazione tangenziale è nulla perché la pallina si muove con velocità uniforme, l'accelerazione centripeta è $a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{g}{\tan\alpha}$.

Nota: è possibile scegliere, in modo del tutto equivalente, un sistema di riferimento con asse y ortogonale alla superficie interna del cono e asse x diretto lungo la superficie stessa; in questo caso l'accelerazione centripeta si decompone nelle sue componenti lungo i nuovi assi e le equazioni del moto diventano:

$$\begin{cases} m\frac{v^2}{R}\cos\alpha = N - mg\sin\alpha \\ m\frac{v^2}{R}\sin\alpha = mg\cos\alpha \end{cases}$$