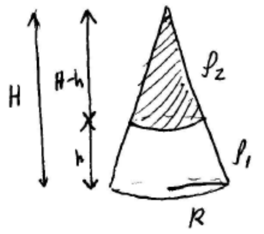
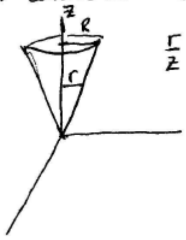
Esercitazione 5

Esercizio 1
Calcolare l'altezza del centro di massa di un cono non omogeneo, di altezza H e raggio di base R, la cui densità è pari a ρ_1 fino ad altezza h e a ρ_2 dall'altezza h fino al vertice.

Soluzione



▷ Consideriamo un cono di densità ρ, raggio R ed altezza H



$\frac{r}{z} = \frac{R}{H} \rightarrow r = \frac{R}{H} z$

Massa del cono $M = \int dm$

$dm = \rho\, dV = \rho \pi r^2 dz = \rho \pi \frac{R^2}{H^2} z^2 dz$

$M = \int dm = \int_0^H \rho \pi \frac{R^2}{H^2} z^2 dz = \rho \pi \frac{R^2}{H^2} \frac{H^3}{3} = \rho \frac{\pi R^2 H}{3}$

Per simmetria il centro di massa è sull'asse z

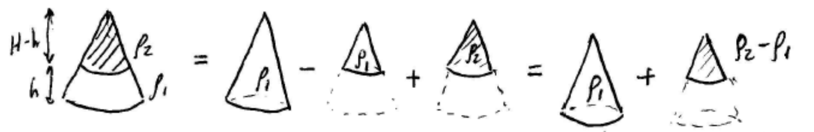
$M z_{CM} = \int_0^H z\, dm = \rho \pi \frac{R^2}{H^2} \int_0^H z^3 dz = \frac{1}{4} \rho \pi R^2 H^2 = \frac{3}{4} \frac{\rho \pi R^2 H}{3} H = \frac{3}{4} M H$

$z_{CM} = \frac{3}{4} H$

Se consideriamo il cono con la base in giù

$z_{CM} = \frac{1}{4} H$

▷ Consideriamo un cono con due densità (ρ_1 fino ad altezza h e ρ_2 da h a H)



Massa M_1
altezza H
raggio R

Massa ΔM
altezza $(H-h)$
raggio $R_1 = R\left(1 - \frac{h}{H}\right)$

$$\boxed{z_{CM} = \frac{M_1 \cdot \frac{H}{4} + \Delta M \left(h + (H-h)\frac{1}{4}\right)}{M_1 + \Delta M}}$$

dove $M_1 = \rho_1 \frac{\pi R^2 H}{3}$

$\Delta M = (\rho_2 - \rho_1) \frac{\pi R_1^2 (H-h)}{3}$

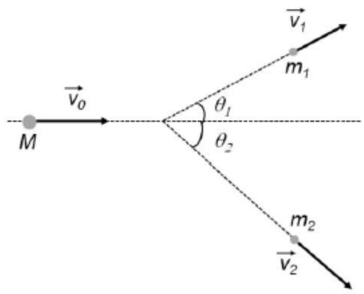
$\Delta M = (\rho_2 - \rho_1) \frac{1}{3} \pi \left(\frac{R}{H}\right)^2 (H-h)^3$

Esercizio 2

Un corpo di massa M procede a velocità v_0 in una zona dello spazio esente da forze. Ad un certo istante, tramite un meccanismo di forze interne, la massa M si spezza in due frammenti, di masse m_1 e m_2, che proseguono ambedue con velocità di modulo $v_f = |v_1| = |v_2|$ su traiettorie che formano rispettivamente angoli θ_1 e θ_2 rispetto alla traiettorie del centro di massa (vedi figura). Tenendo conto che la somma delle masse dei due frammenti è pari alla massa iniziale M, determinare:

a. il rapporto m_1/m_2 tra le masse dei due frammenti;

b. il modulo della velocità v_f.



Soluzione

$$M\vec{v}_0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$ Conservazione della quantità di moto

asse x $\rightarrow$ $$M v_0 = m_1 v_f \cos\theta_1 + m_2 v_f \cos\theta_2 \qquad (1)$$

asse y $\rightarrow$ $$0 = m_1 v_f \operatorname{sen}\theta_1 - m_2 v_f \operatorname{sen}\theta_2 \qquad (2)$$

$$(2) \rightarrow \boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{\operatorname{sen}\theta_1}}$$

$$(1) \qquad (m_1 + m_2) v_0 = m_1 v_f \cos\theta_1 + m_2 v_f \cos\theta_2$$

$$\left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right) v_0 = \frac{m_1}{m_2} v_f \cos\theta_1 + v_f \cos\theta_2$$

$$\left(\frac{\operatorname{sen}\theta_2}{\operatorname{sen}\theta_1} + 1\right) v_0 = \left(\frac{\operatorname{sen}\theta_2}{\operatorname{sen}\theta_1}\cos\theta_1 + \cos\theta_2\right) v_f$$

$$(\operatorname{sen}\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1) v_0 = (\operatorname{sen}\theta_2\cos\theta_1 + \cos\theta_2\operatorname{sen}\theta_1) v_f = \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) v_f$$

$$\boxed{v_f = \frac{\operatorname{sen}\theta_1 + \operatorname{sen}\theta_2}{\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)} v_0}$$

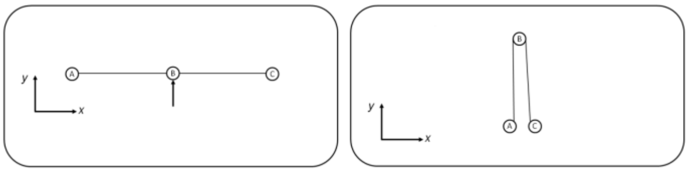
Esercizio 3

Nel sistema in figura i tre dischetti A, B e C sono collegati da fili inestensibili di uguale lunghezza; le dimensioni dei dischetti sono trascurabili. Inizialmente il sistema è fermo su un piano liscio orizzontale. Al dschetto B viene applicata per un tempo brevissimo una forza perpendicolare ai fili che produce un impulso $J = 2$ N·s (vedi figura a sinistra). Sapendo che $m_A = m_C = 0.3$ kg e $m_B = 0.4$ kg, calcolare:

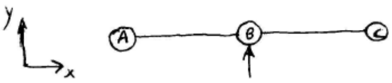
a. la velocità del centro di massa del sistema;

b. la velocità di A e C un istante prima che si tocchino (vedi figura a destra);

c. il lavoro delle forze interne se A e C non si staccano dopo l'urto.



Soluzione



1) L'impulso (J) è eguale alla variazione di quantità di moto del sistema

$J = M_{TOT} v_{CM} = (m_A + m_B + m_C)\, v_{CM}$ (il sistema inizialmente è fermo) e dopo l'impulso acquisisce una velocità v_{CM}

$v_{CM} = \frac{J}{m_A + m_B + m_C} = \frac{2\ N \cdot s}{1\ kg} = 2\ m/s$

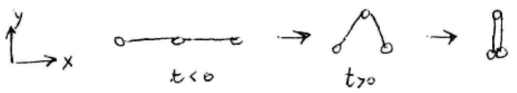
Dopo l'applicazione di quel impulso iniziale, la velocità del centro di massa, diretta lungo l'asse y, resta costante perché la risultante delle forze esterne è nulla.

$M_{TOT} \vec{v}_{CM} = m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B + m_C \vec{v}_C$

Inizialmente $v_A = v_C = 0$ $\quad v_B \neq 0$

$v_B = \frac{m_A + m_B + m_C}{m_B} v_{CM} = 5\ m/s$

2)

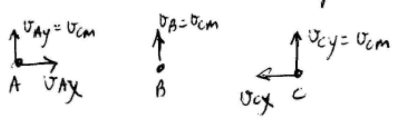


Quando A e C si toccano (un istante prima dell'urto)

$v_{Ax} = -v_{Cx}$ (conservazione della quantità di moto lungo l'asse x)

$v_{Ay} = v_B = v_{Cy} = v_{CM}$ (i tre corpi si muovono solidalmente lungo l'asse y)

Quindi $|\vec{v}_A| = |\vec{v}_C|$



Dal istante subito dopo l'applicazione dell'impulso al istante subito prima del urto tra A e C l'energia si conserva

$$\frac{1}{2} m_B v_{B,IN}^2 = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 + \frac{1}{2} m_C v_C^2$$

$$\frac{1}{2} m_B v_{B\,IN}^2 = \frac{1}{2} m_A (v_{CM}^2 + v_{Ax}^2) + \frac{1}{2} m_B v_{CM}^2 + \frac{1}{2} m_C \left(v_{CM}^2 + v_{Cx}^2 \right)$$

$$\frac{1}{2} m_B v_{B\,IN}^2 = \frac{1}{2} (m_A + m_C) v_{Ax}^2 + \frac{1}{2} (m_A + m_B + m_C) v_{CM}^2$$

$$v_{B,IN} = 5\,m/s \ ; \ v_{CM} = 2\,m/s \rightarrow v_{Ax} = 3{,}16\ m/s$$

$v_{Ax} = 3{,}16\ m/s$	$v_{Ay} = 2\,m/s$
$v_{Bx} = 0$	$v_{By} = 2\,m/s$
$v_{Cx} = -3,$[illegible]$\,m/s$	$v_{Cy} = 2\,m/s$

velocità dei tre corpi prima del urto tra A e C

3) Prima dell'urto l'energia cinetica del sistema è

$$E_{IN} = \frac{1}{2} m_B v_{B\,IN}^2 = 5\,J \quad (v_A = v_C = 0)$$

È interessante notare che

$$E_{IN} = \underbrace{\frac{1}{2}(m_A + m_B + m_C) v_{CM}^2}_{\text{E.cin del CM}} + \underbrace{\frac{1}{2} m_A (v_A^{CM})^2 + \frac{1}{2} m_B (v_B^{CM})^2 + \frac{1}{2} m_C (v_C^{CM})^2}_{\text{E.cin di A,B,C rispetto al CM}}$$

E.cin del CM: $v_{CM} = 2\,m/s \downarrow 2\,J$

E.cin di A,B,C rispetto al CM: $v_A^{CM} = v_C^{CM} = 2\,m/s$, $v_B^{CM} = 3\ m/s \downarrow 3\,J$

Dopo l'urto i tre corpi si muovono con $v_A = v_B = v_C = v_{CM}$

$$E_F = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 + \frac{1}{2} m_C v_C^2 = \frac{1}{2} (m_A + m_B + m_C) v_{CM}^2 = 2\,J$$

L'energia dissipata (lavoro delle forze interne)

$$\Delta E = E_F - E_{IN} = -3\ J$$

Quest'energia corrisponde a l'energia cinetica dei corpi rispetto al CM

Esercizio 4

Due blocchi identici di massa m, assimilabili a punti materiali, sono poggiati su una mensola rigida e liscia, amovibile (ancorata cioè al muro o a terra) come illustrato in figura. Tra i due blocchi è interposta una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo L_0. Nell'istante iniziale la molla è completamente compressa (figura a sinistra) ed i blocchi sono fermi grazie ad un sistema di bloccaggio. Ad un dato istante si rimuove istantaneamente il sistema di bloccaggio e i due blocchi sono lasciati liberi di muoversi con velocità iniziali nulle. Si determini:

a. le velocità $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ dei due blocchi nell'istante in cui la molla è nella posizione di riposo, come illustrato nella figura a destra;

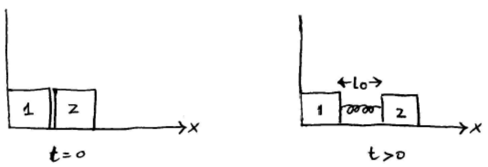
b. la velocità $\vec{v}_{CM}$ del centro di massa del sistema nell'istante in cui la molla è nella posizione di riposo, illustrando il bilancio energetico del processo;

c. il modulo della reazione vincolare della mensola dall'istante iniziale al momento in cui la molla raggiunge la sua lunghezza di riposo;

d. cosa accade dopo l'istante in cui la molla è nella posizione di riposo, ricavando in particolare la velocità del centro di massa negli istanti successivi;

e. il moto compiuto dai due blocchi nel sistema di riferimento del centro di massa, verificando che è un moto armonico e calcolandone la pulsazione ω.

Soluzione



1/ Il sistema è soto l'azione di una forza esterna (la reazione vincolare della mensola sul corpo 1, vedi (4.3)), ma questa forza non realiza lavoro perchè il punto di applicazione rimane fermo. Di conseguenza, l'energia meccanica del sistema si conserva.

$$E_{TOT}^{i} = E_{TOT}^{F}$$

$$K^i + V^i = K^F + V^F \rightarrow \frac{1}{2} m v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m v_{2i}^2 + \frac{1}{2} K L_0^2 = \frac{1}{2} m v_{1F}^2 + \frac{1}{2} m v_{2F}^2 + \overset{V^F=0}{0}$$

en. cinetica

en. elastica della molla

dove $v_{1i} = v_{2i} = 0$ (corpi inizialmente in riposo)

$v_{1F} = 0$ (il corpo 1 non si muove perchè e bloccato per la mensola)

Quindi $\frac{1}{2} K L_0^2 = \frac{1}{2} m v_{2F}^2 \rightarrow \boxed{v_{2F} = L_0 \sqrt{\frac{K}{m}} \quad v_{1F} = 0}$

2/ $m\vec{v}_{1F} + m\vec{v}_{2F} = (m+m)\vec{V}_{CM,F}$ quantità di moto totale

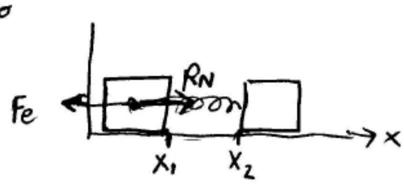
inizialmente $m\vec{v}_{1i} + m\vec{v}_{2i} = (m+m)\vec{V}_{CM\,i} = 0 \rightarrow V_{CM,i} = 0$

Quando la molla è nella posizione di riposo $v_{1F} = 0$, $v_{2F} = L_0\sqrt{\frac{K}{m}}$

$$V_{CM,F} = \frac{1}{2} v_{2F} = \frac{L_0}{2}\sqrt{\frac{K}{m}}$$

La quantità di moto del sistema non si conserva perchè c'è una forza esterna (reazione vincolare della mensola)

3| Fino a che la molla è nella posizione di riposo L_0, il corpo 1 rimane fermo



La risultante delle forze sul corpo 1 è nulla

$\vec{F_e} + \vec{R_N} = 0$ $\quad\quad$ $\vec{F_e}$ forza elastica della molla

$\vec{R_N}$ reazione vincolare della mensola

In modulo $\quad R_N = F_e = K\left(L_0 - (x_2 - x_1)\right)$

4| Quando la molla è nella posizione di equilibrio $R_N = F_e = 0$

Da quel istante in poi non ci sono forze esterne sul sistema $\Sigma F_{ext} = R_N = 0$

v_{CM} = costante → Il centro di massa del sistema continua a muoversi con velocità costante

5| Dal istante in cui la molla è nella posizione di equilibrio le equazioni del moto per il corpo 1 e 2 sono:

$$m\ddot{x}_1 = K(x_2 - x_1 - L_0)$$
$$m\ddot{x}_2 = -K(x_2 - x_1 - L_0)$$

$$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -2K(x_1 - x_2 - L_0)$$

Coordinata relativa $\quad \Delta x = x_1 - x_2 \;;\; \Delta\ddot{x} = \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2$

$$m\Delta\ddot{x} = -2K(\Delta x - L_0)$$ → Equazione del moto armonico semplice

pulsazione $\quad \omega = \sqrt{\frac{2K}{m}}$

Esercizio 5

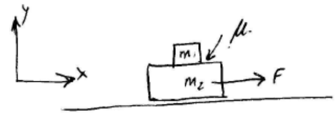
Un baule di massa $m_1 = 10$ kg è posto su una tavola di legno di massa $m_2 = 25$ kg, a sua volta poggiata su una superficie di ghiaccio perfettamente orizzontale. Sulla tavola è applicata una forza $\vec{F}$ parallela al piano, come mostrato in figura. L'attrito tra la tavola di legno e il baule è caratterizzato dai coeffcienti di attrito statico $\mu_s = 0.8$ e dinamico $\mu_d = 0.6$, mentre quello tra la tavola di legno e il ghiaccio è trascurabile. Si determini:

a. l'espressione del valore massimo F_{max} della forza che possiamo è possibile applicare affinché il baule rimanga fermo rispetto alla tavola di legno e l'espressione delle accelerazioni dei due corpi per $F \leq F_{max}$;

b. l'espressione dell'accelerazione dei due corpi per $F \geq F_{max}$;

c. considerando che il baule è inizialmente fermo al centro della tavola di legno, anch'essa ferma; se la lunghezza della tavola è $l = 2$ m, calcolare il tempo t_c, dall'applicazione della forza $F = 300$ N al tempo $t = 0$, dopo il quale il baule cadrà dalla tavola di legno.

Soluzione

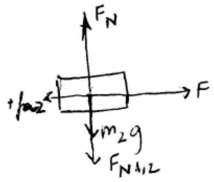


Corpo 1

asse x: $fa_1 = m a_1$ (1)

asse y: $F_{N2,1} - m_1 g = 0 \rightarrow F_{N2,1} = m_1 g$ (2)

Corpo 2



asse x: $F + fa_2 = m_2 a_2$ (3)

asse y: $F_N - m_2 g + F_{N1,2} = 0 \rightarrow F_N = (m_1 + m_2) g$ (4)

$F_{N1,2} = -F_{N2,1}$ (5) $fa_1 = -fa_2$ (6)

1) I corpi ~~..~~ si muovono insieme (1) $\rightarrow F = m_2 a_2 - fa_2 \underset{(6)}{=} m_2 a_2 + fa_1 \underset{(1)}{=} m_2 a_2 + m_1 a_1$

$F = m_1 a_2 + m_2 a_1 \underset{a_1 = a_2 = a}{=} (m_1 + m_2) a$

$m_1 a = fa \leq \mu_s m_1 g$ ~~...~~ $\rightarrow a \leq \mu_s g$

$$\boxed{F_{MAX} = (m_1 + m_2)\mu_s g}$$

Per $F \leq F_{MAX} \rightarrow a = \dfrac{F}{m_1 + m_2}$ Come l'accelerazione di un unico corpo di massa $(m_1 + m_2)$

2) Per $F > F_{MAX}$

Corpo 1 $fa_1 = \mu_d m_1 g = m_1 a_1 \rightarrow \boxed{a_1 = \mu_d g}$

Corpo 2

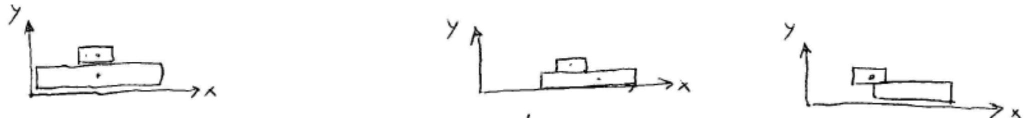
$F - \mu_d m_1 g = m_2 a_2 \rightarrow \boxed{a_2 = \dfrac{F - \mu_d m_1 g}{m_2}}$

3)

Verifichiamo che $F > F_{MAX}$ $(F = 300N)$

$F_{MAX} = (m_1 + m_2)\mu_S g = (10+25)kg \cdot 0'8 \cdot 9'81\, m/s^2 = 274.4N$

Quindi si verifica $F > F_{MAX}$



$t=0$ $t>0$ $t=t_F$

Il baule cadrà dalla tavola di legno quando il suo centro coincida con l'estremità della tavola.

Estremità della tavola → $x_2(t) = x_{02} + v_{02}t + \frac{1}{2}a_2 t^2 = \frac{1}{2}a_2 t^2$

$x_{02}=0,\ v_{02}=0$

Centro del baule → $x_1(t) = x_{01} + v_{01}t + \frac{1}{2}a_1 t^2 = x_{01} + \frac{1}{2}a_1 t^2$

$v_{01}=0$

dove $x_{01} = 1\,m$, $a_1 = \mu_d g = 0'6\ 9'81\, m/s^2 = 5'89\, m/s^2$

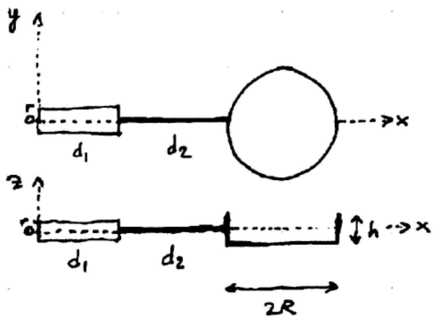
$a_2 = \dfrac{300N - 0'6 \cdot 9'81 \cdot 10}{25} = 9{,}645\ m/s^2$

$x_1(t_F) = x_2(t_F) \rightarrow 1 + \frac{1}{2}5'89\, t_F^2 = \frac{1}{2}9{,}645\, t_F^2 \rightarrow t_F = 0{,}73\, s$

Altri due esercizi

Determinare la posizione del centro di massa di una pentola composta da un manico di legno cilindrico di raggio r, lunghezza d_1 e densità di volume ρ_L, una bacchetta di ferro di lunghezza d_2 e densità lineare λ_F e un cilindro metallico di alluminio (aperto da un lato come tutte le pentole) di raggio R, altezza h e densità di superficie σ_A. Il manico è attaccato alla pentola ad altezza $h/2$ e la bacchetta di ferro è allineata con l'asse del cilindro di legno.

Soluzione



PADELLA

1 = manico cilindrico di legno ρ_L

2 = bacchetta di ferro λ_F

3 = mantello cilindrico della padella σ_A

4 = fondo circolare della padella σ_A

$$M_1 = \rho_L \pi r^2 d_1 \qquad \vec{r}_{c_1} = \left(\frac{d_1}{2}, 0, 0\right)$$

$$M_2 = \lambda_F d_2 \qquad \vec{r}_{c_2} = \left(d_1 + \frac{d_2}{2}, 0, \ \right)$$

$$M_3 = \sigma_A 2\pi R h \qquad \vec{r}_{c_3} = \left(d_1 + d_2 + R, 0, 0\right)$$

$$M_4 = \sigma_A \pi R^2 \qquad \vec{r}_{c_4} = \left(d_1 + d_2 + R, 0, -\frac{h}{2}\right)$$

$$\vec{r}_c = \frac{M_1 \vec{r}_{c_1} + M_2 \vec{r}_{c_2} + M_3 \vec{r}_{c_3} + M_4 \vec{r}_{c_4}}{M_1 + M_2 + M_3 + M_4} =$$

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{M_1 \frac{d_1}{2} + M_2\left(d_1 + \frac{d_2}{2}\right) + (M_3 + M_4)(d_1 + d_2 + R)}{M_1 + M_2 + M_3 + M_4} \\ y_c = 0 \\ z_c = \dfrac{-M_4 \frac{h}{2}}{M_1 + M_2 + M_3 + M_4} \end{cases}$$

In un riferimento inerziale S, dall'estremità di una barca di massa m_1 inizialmente ferma (per essere precisi, da un punto che si trova a distanza $L/2$ dal suo centro di massa, vedi figura), viene sparato all'istante $t=0$, con velocità orizzontale v_2 rispetto al riferimento S, un proiettile di massa m_2 che scorre senza attrito lungo il fondo della barca fino a conficcarsi sull'altro estremo (che si trova a distanza $L/2$ ma dal lato opposto del centro di massa, vedi figura).

1 Determinare, nel caso in cui l'attrito dinamico μ_d fra barca e mare sia nullo, l'istante finale t_F nel quale il proiettile si conficca nell'estremità opposta della barca e, nel sistema S, la velocità della barca e le posizioni del proiettile e del centro della barca all'istante t_F

2 Analizzare il moto e determinare le stesse quantità finali nel caso in cui sia $\mu_d \neq 0$.

Soluzione

▷ Per evitare troppi indici chiamo d'ora in poi con lettere minuscole le proprietà del proiettile e con maiuscole quelle della barca; rispetto ai simboli usati nel testo

$m_1 = M$, $v_1 = V$, $m_2 = m$, $v_2 = v$

per lo stesso motivo pongo $\mu_d = \mu$

Lavoro nel sistema S (inerziale, terraferma e mare)

▷ Subito prima dello sparo $Q = 0$ (barca e proiettile fermi, quantità di moto nulla)

▷ Anche subito dopo (lo sparo è un evento impulsivo, forze impulsive solo interne, le forze esterne si trascurano anche quando, come nel caso $\mu \neq 0$, ci sono)

$$Q = mv + MV = 0 \longrightarrow V = -\frac{m}{M} v$$

▷ Le posizioni a $t=0$ sono X (centro della barca), x (posizione del proiettile)

$$X(t=0) = 0 \quad ; \quad x(t=0) = -\frac{L}{2}$$

La posizione del centro di massa (x_c) a $t=0$ è

$$x_c = \frac{mx + MX}{m+M} = -\frac{m}{m+M}\frac{L}{2}$$

▷ Le velocità a $t=0$ (subito dopo lo sparo) sono v e $V = -\frac{m}{M} v$

▷ Quindi per $t>0$, e prima dell'impatto del proiettile sull'altro estremo della barca, il proiettile si muove di moto rettilineo uniforme verso destra, con velocità

$$v(t) = v = \text{costante}$$

mentre la barca si muove verso sinistra, con velocità decrescente in modulo per effetto dell'attrito. La forza di attrito è $\mu R_N = \mu(m+M)g$ ed agisce sulla barca di massa $M \rightarrow M\dot{V} = \mu(m+M)g$

Quindi $$V(t) = -\frac{m}{M}v + \frac{m+M}{M}\mu g t$$

In queste condizioni si danno 3 casi, a seconda dell'entità dell'attrito μ:

(A) → $\mu = 0$: anche $V = -\frac{m}{M}v$ è costante prima dell'impatto

(B) → μ debole: la barca rallenta ma è ancora in moto al momento dell'impatto

(C) → μ forte: la barca rallenta e si ferma prima dell'impatto

Ⓐ → $\mu = 0$

In questo caso è facile vedere che $t_F = \frac{L}{v - V} = \frac{M}{m+M}\,\frac{L}{v}$

$x_F = \frac{L}{2} - \frac{m}{m+M} L$; $X_F = -\frac{mL}{m+M}$; $X_{cF} = \frac{-m}{m+M}\,\frac{L}{2} = X_{ci}$

Il centro di massa è rimasto fermo, giustamente: la sua velocità subito prima dello sparo era nulla, e, per $\mu = 0$, le forze esterne sono nulle $\forall\, t > 0$ quindi v_c resta nulla e il centro di massa non si muove

▷ Come distinguere fra i casi Ⓑ (attrito debole) e Ⓒ (attrito forte)?

Basta trovare la condizione per il caso limite nel quale l'impatto del proiettile sul lato destro avviene nello stesso istante in cui la barca si ferma per effetto dell'attrito

▷ se l'impatto non avvenisse prima, la barca, per il solo effetto dell'attrito, si fermerebbe per $t = t_1 = \frac{m}{m+M}\,\frac{v}{\mu g}$ (quando $v(t_1) = 0$)

▷ se al momento dell'impatto la barca stesse ancora rallentando, l'impatto avverrebbe per $t = t_2 = \frac{v}{\mu g} - \sqrt{\left(\frac{v}{\mu g}\right)^2 - \frac{2M}{m+M}\,\frac{L}{\mu g}}$

[Infatti, in tal caso, prima dell'impatto, proiettile e centro barca sono in

$x(t) = -\frac{L}{2} + vt$, $X(t) = -\frac{m}{M} v t + \frac{1}{2}\,\frac{m+M}{M}\,\mu g t^2$

il valore di t_2 dato sopra corrisponde alla soluzione dell'equazione di secondo grado che si ottiene imponendo la condizione di impatto

$$x(t) - X(t) = \frac{L}{2}$$

la scelta del segno meno si fa osservando che è quella la soluzione che tende al limite giusto per $\mu \to 0$ (assenza di attrito)]

▷ Eguagliando t_1 e t_2 si ottiene, con un po' di algebra, che, fissati gli altri dati del problema, e definito il valore critico di attrito μ^*

$$\mu^* = \frac{v^2}{2Lg}\,\frac{m}{M}\,\frac{m+2M}{m+M}$$

Ⓑ → $\mu < \mu^* \rightarrow t_1 > t_2$, l'impatto avviene prima dell'arresto della barca

Ⓒ → $\mu > \mu^* \Rightarrow t_1 < t_2$, l'arresto della barca avviene prima dell'impatto

mentre $\mu = \mu^* \Rightarrow t_1 = t_2 = t^* = \sqrt{\frac{mM}{(m+2M)(m+M)}\,\frac{2L}{\mu^* g}}$ è il caso critico

(B) $\mu < \mu^*$, attrito debole

- Il proiettile in questo caso si conficca nel lato destro della barca, mentre questa sta ancora viaggiando verso sinistra, all'istante $t_i = t_2 = \frac{v}{\mu g} - \sqrt{\left(\frac{v}{\mu g}\right)^2 - \frac{2M}{m+M}\frac{L}{\mu g}}$

  La velocità della barca subito prima dell'impatto e la posizione del suo centro sono:

$$V_i = -\frac{m}{M}v + \frac{m+M}{M}\mu g t_i \quad ; \quad X_i = -\frac{m}{M}v t_i + \frac{1}{2}\frac{m+M}{M}\mu g t_i^2$$

  quelle del proiettile sono $\quad v \quad$ e $\quad x_i = X_i + \frac{L}{2}$

- Nell'impatto si conserva la quantità di moto totale (urto anelastico) subito dopo l'impatto l'insieme proiettile + barca parte con velocità

$$\tilde{v} = \tilde{V} = v_c = \frac{mv + MV_i}{m+M} = (\text{sostituendo}) = \mu g t_i > 0$$

  Cioè parte con velocità verso destra; il risultato poteva essere ottenuto anche calcolando l'impulso totale delle forze esterne $I_{ext} = (m+M)v_c$ dove $I_{ext} = \int_0^{t_i} F_{ext}\,dt = F_{attrito} \cdot t_i = (m+M)\mu g t_i$

- Per $t > t_i$ l'insieme barca + proiettile viaggia verso destra rallentando per effetto dell'attrito μ (adesso la forza di attrito attua sull'insieme barca + proiettile, di massa $m+M$, e l'accelerazione è $-\mu g$). Il centro della barca si muove con legge

$$X(t) = X_i + \tilde{V}(t-t_i) - \frac{1}{2}\mu g (t-t_i)^2$$

$$V(t) = \tilde{V} - \mu g (t-t_i)$$

  e si ferma quindi per $t - t_i = \frac{\tilde{V}}{\mu g} = \frac{\mu g t_i}{\mu g} = t_i$, ovvero per $t_f = 2t_i$

- La posizione finale del centro della barca è quindi

$$X_f = X_i + \mu g t_i \cdot t_i - \frac{1}{2}\mu g t_i^2 = X_i + \frac{1}{2}\mu g t_i^2 = (\text{sostituendo } X_i)$$

$$= -\frac{m}{M}v t_i + \frac{1}{2}\frac{m+M}{M}\mu g t_i^2 + \frac{1}{2}\mu g t_i^2$$

$$= -\frac{m}{M}v t_i + \frac{1}{2}\frac{m+2M}{M}\mu g t_i^2$$

ⓒ → $\mu > \mu^*$, attrito forte

- ▷ La barca si arresta per $t = t_1$ prima che il proiettile si conficchi nella sua estremità destra. Per $t = t_1$ il centro della barca si trova a

$$X_1 = -\frac{m}{M} v t_1 + \frac{1}{2} \frac{m+M}{M} \mu g t_1^2 = -\frac{1}{2} \frac{m}{M} \frac{m}{m+M} \frac{v^2}{\mu g}$$

e il proiettile si trova a $\quad x_1 = -\frac{L}{2} + v t_1 = -\frac{L}{2} + \frac{m}{m+M} \frac{v^2}{\mu g}$

- ▷ Da questo momento in poi (cioè per $t > t_1$) la barca è ferma col centro in X_1 mentre il proiettile continua a viaggiare a velocità v verso destra. Dunque l'intervallo di tempo dopo t_1 necessario affinché il proiettile raggiunga l'estremità destra della barca è dato da $\left(X_1 + \frac{L}{2}\right) - x_1 = v \Delta t$, che fornisce

$$\Delta t = \left[\frac{L}{v} - \frac{v}{\mu g} \frac{m}{m+M} \left(1 + \frac{m}{2M}\right)\right]$$

- ▷ Riepilogando: la barca si arresta per $t_1 = \frac{m}{m+M} \frac{v}{\mu g}$ e il proiettile si conficca nel lato destro per $t_i = t_1 + \Delta t$, dove Δt è dato dalla formula qui sopra e t_i indica l'istante dell'impatto

- ▷ All'istante t_i, subito prima di conficcarsi, la velocità del proiettile è ancora v e la sua posizione è ovviamente $\quad x_i = X_i + \frac{L}{2} = \frac{L}{2} - \frac{1}{2} \frac{m}{M} \frac{m}{m+M} \frac{v^2}{\mu g}$
la velocità V della barca è zero.

- ▷ Nell'impatto (urto anelastico) si conserva la quantità di moto, quindi subito dopo l'impatto l'insieme proiettile e barca parte con velocità $\tilde{v} = \tilde{V} = v_c = \frac{m}{m+M} v$ soggetto ancora all'attrito μ (accelerazione pari a $-\mu g$)

- ▷ Il centro della barca, in particolare, si muove con legge

$$X(t) = X_1 + \frac{m}{m+M} v (t - t_i) - \frac{1}{2} \mu g (t - t_i)^2$$

e si ferma definitivamente per $\quad t - t_i = \frac{m}{m+M} \frac{v}{\mu g} \rightarrow t_f = t_i + \frac{m}{m+M} \frac{v}{\mu g}$

- ▷ La posizione del centro della barca, dopo opportuni sviluppi, è

$$X_f = X_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{m}{m+M}\right)^2 \frac{v^2}{\mu g} = \text{(sostituendo } X_1\text{)} =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{m^3}{(m+M)^2 M} \frac{v^2}{\mu g}$$

cioè $X_f < 0$, ovviamente