Esercitazione 6

Esercizio 1 - Momento d'inerzia del cono
Calcolare il momento di inerzia di un cono omogeneo, di altezza H, angolo al vertice α e massa M, rispetto al suo asse di simmetria.

Soluzione

Calcoliamo il momento di inerzia come l'integrale di momenti di inerzia di dischi di raggio r e altezza infinitesima dz:

$$I = \int \frac{1}{2} r^2 dM = \int_0^H \frac{1}{2} \left(\frac{R(H-z)}{H} \right)^2 \rho\pi \left(\frac{R(H-z)}{H} \right)^2 dz$$

dove ρ è la densità del cono e $R = H \tan(\frac{\alpha}{2})$ è il raggio della base del cono. Introducendo la variabile $t = H - z$, l'integrale diventa:

$$I = \frac{\rho\pi R^4}{2H^4} \int_0^H t^4 dt = \frac{\rho\pi R^4 H}{10} = \frac{3}{10} M R^2 = \frac{3}{10} M \left(H \tan(\frac{\alpha}{2}) \right)^2$$

Esercizio 2 - Momento d'inerzia della molecola biatomica
Una molecola biatomica è schematizzabile con un corpo rigido costituito di due masse puntiformi M_1 ed M_2 poste alla distanza di equilibrio di legame R. Mostrare che il momento di inerzia della molecola rispetto all'asse baricentrico perpendicolare all'asse molecolare è uguale a μR^2, dove $\mu = M_1 M_2/(M_1 + M_2)$ è la massa ridotta della molecola.

Soluzione

Calcoliamo le coordinate del baricentro del sistema, supponendo che M_1 sia posta in $x = 0$ e M_2 in $x = R$:

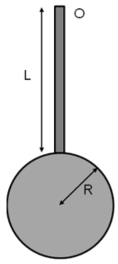
$$x_B = \frac{M_2 R}{M_1 + M_2}$$

La massa M_1 si trova quindi a distanza x_B dall'asse baricentrico, mentre la massa M_2 è a distanza $(R - x_B)$. Il momento di inerzia rispetto all'asse baricentrico è allora:

$$I = M_1 x_B^2 + M_2 (R - x_B)^2 = \frac{M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^2} (M_1 + M_2) R^2 = \mu R^2$$

Esercizio 3 - Pendolo fisico

Un pendolo fisico è costituito da un'asta rigida, di lunghezza L e massa m, alla quale è saldato, ad una estremità, un disco massiccio di massa M e raggio R, come mostrato in figura. Si calcoli il periodo delle piccole oscillazioni del pendolo quando esso è posto in oscillazione attorno all'estremo O dell'asta.



Soluzione

Dalla seconda equazione cardinale abbiamo che $M = I\ddot{\theta}$. Il monento è dato dall'azione della forza peso agente su asta e disco, i cui baricentri distano $L/2$ e $(L+R)$ dal perno O, rispettivamente:

$$M = -\left(m_1 g \frac{L}{2} \sin\theta + m_2 g (L+R) \sin\theta \right)$$

Dal teorema di Huygens-Steiner, il momento di inerzia totale del sistema sarà:

$$I = I_{asta} + I_{disco} = I_{a,CDM} + I_{CDM_a} + I_{d,CDM} + I_{CDM_d}$$

cioè

$$I = \frac{1}{12} m_1 L^2 + m_1 \frac{L^2}{4} + \frac{1}{2} m_2 R^2 + m_2 (L+R)^2$$

Nel limite delle piccole oscillazioni, l'equazione del moto diventa:

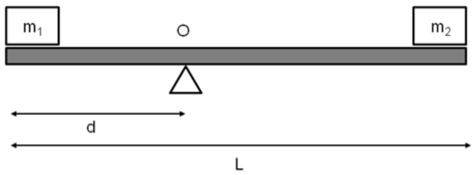
$$-\left(m_1 \frac{L}{2} + m_2 (L+R) \right) g\theta = I\ddot{\theta}$$

da cui

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\left(m_1 \frac{L}{2} + m_2 (L+R) \right) g}}$$

Esercizio 4 - Bilancia

Un'asta omogenea, di massa $M = 10$ kg e lunghezza $L = 1$ m, è appoggiata su un fulcro liscio, distante $d = 0.2$ m da uno dei due estremi. L'asta è in equilibrio sotto l'azione di due pesi m_1 ed m_2 appoggiati agli estremi dell'asta stessa, come mostrato in figura. Sapendo che $m_2 = 5$ kg, calcolare il valore di m_1.

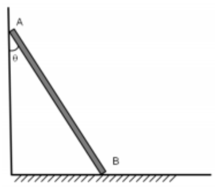


Soluzione

Se l'asta è in equilibrio, il momento risultante dalle forze peso è nullo:

$$m_1 g d - m_2 g (L-d) - Mg \left(\frac{L}{2} - d \right) = 0 \rightarrow m_1 = \frac{m_2 (L-d) + M(\frac{L}{2} - d)}{d} = 35\,\mathrm{kg}$$

Esercizio 5 - Scala
Una scala AB è appoggiata ad un muro verticale liscio, formando con esso un angolo θ. Sapendo che tra la scala ed il pavimento c'è attrito statico con coefficiente $\mu_s = 0.1$, si calcoli il massimo valore dell'angolo θ affinché la scala resti in equilibrio.



Soluzione

Le forze che agiscono sulla scala sono: la forza peso, applicata nel centro di massa della scala, le reazioni vincolari normali $\vec{N}_A$ e $\vec{N}_B$ applicate in A e B, rispettivamente, e la forza di attrito $\vec{F}_a$ applicata in B. Dall'equilibrio delle forze e dei momenti (scegliendo come polo il punto B) si ottiene:

$$\begin{cases} N_B - mg = 0 \\ N_A - F_a = 0 \\ mg\frac{L}{2}\sin\theta - N_A L\cos\theta = 0 \end{cases}$$

dove L è la lunghezza della scala. Infine:

$$F_a = \frac{1}{2}mg\tan\theta \leq \mu_s mg \quad \rightarrow \quad \theta \leq \arctan(2\mu_s)$$

Esercizio 6 - Giostra
Una piccola giostra artigianale, di diametro $D = 50$ cm, viene fatta ruotare orizzontalmente tirando una fune avvolta intorno ad essa. Se alla fune viene esercitata una forza di modulo $F = 10$ N per un tempo $\Delta t = 1$ s, la giostra, partendo da ferma, compie in tale intervallo di tempo una rotazione completa.

a. Quale momento delle forze esterne M_{ext} è applicato dalla fune sulla giostra?
b. Qual è l'accelerazione angolare $\alpha = d\omega/dt$ della giostra?
c. Qual è il momento di inerzia I_0 della giostra rispetto al suo asse di rotazione?
d. Successivamente, viene aggiunto sulla giostra un sedile cilindrico omogeneo di massa $m = 3$ kg e raggio $r = 5$ cm, fissato sul piano della giostra in posizione verticale, con l'asse a distanza $L = 10$ cm dall'asse di rotazione della giostra. Poi, tirando la fune, viene di nuovo applicata la forza costante F del caso precedente. Quanto vale adesso l'accelerazione angolare α' della giostra?

Soluzione

Il momento delle forze esterne è

$$M_{ext} = F\frac{D}{2} = 2.5\,\mathrm{N\,m}$$

L'accelerazione angolare si ottiene considerando che, nel tempo di applicazione della forza, la giostra compie un moto circolare uniformemente accelerato, ruotando di un angolo 2π:

$$2\pi = \frac{1}{2}\alpha\Delta t^2 \quad \rightarrow \quad \alpha = 13\,[\mathrm{rad}]/\mathrm{s}^2$$

Il momento di inerzia si ricava dalla seconda equazione cardinale:

$$M_{ext} = I_0\alpha \quad \rightarrow \quad I_0 = 0.2\,\mathrm{kg\,m}^2$$

L'aggiunta del sedile cilindrico modifica il momento di inerzia del sistema. Dal teorema di Huygens-Steiner, possiamo scrivere il nuovo momento di inerzia I come:

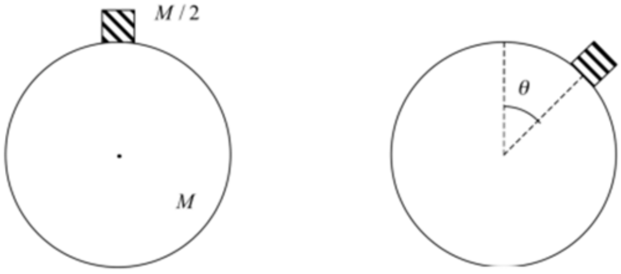
$$I = I_0 + I_{cil} + mL^2 = I + \frac{1}{2}mr^2 + mL^2$$

e, sostituendo nella equazione cardinale, si ha $\alpha' = 11[\mathrm{rad}]/\mathrm{s}^2$.

Esercizio 7 - Rotazione su cilindro

Si consideri un cilindro omogeneo di massa $M = 1.0$ kg e raggio $R = 10$ cm libero di ruotare attorno all'asse del cillindro, in posizione orizzontale, senza attriti. Su di esso viene posta una massa puntiforme $M/2$, come mostrato nella figura (a). All'istante iniziale il sistema è fermo in equilibrio instabile. Successivamente, il sistema cilindro+massa viene messo in rotazione con velocità iniziale trascurabile. Tra la massa ed il cilindro vi è attrito (coefficiente di attrito statico $\mu_s = 0.30$) e per questo motivo, per piccoli valori di θ ($\theta < \theta_{max}$), la massa si muove solidalmente al cilindro, senza strisciare. In queste condizioni, per $\theta = 10°$, si calcoli:

a. la velocità angolare e l'accelerazione angolare del cilindro;
b. l'accelerazione radiale e tangenziale della massa puntiforme;
c. la forza di attrito e la reazione vincolare normale che agiscono sulla massa;
d. si calcoli inoltre il valore θ_{max} per il quale la massa puntiforme inizia a strisciare.



(a) (b)

Soluzione

Se la massa non striscia sul cilindro, l'energia del sistema si conserva:

$$E_i = E_f \quad \rightarrow \quad \frac{M}{2}gR = \frac{M}{2}gR\cos\theta + \frac{1}{2}I\omega^2$$

dove $I = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{M}{2}R^2 = MR^2$ è il momento di inerzia del sistema rispetto all'asse di rotazione; si ricava quindi

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}(1-\cos\theta)} \quad \rightarrow \quad \omega(10°) = 1.2 \text{ [rad]/s}$$

L'accelerazione angolare si ricava differenziando la velocità angolare, o equivalentemente dalla seconda equazione cardinale:

$$\begin{array}{l} \alpha = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{g\sin\theta}{2R} \\ \frac{M}{2}gR\sin\theta = I\alpha \end{array} \quad \rightarrow \quad \alpha(10°) = 8.5 \text{[rad]/s}^2$$

Accelerazione tangenziale e radiale della massa puntiforme sono pari a

$$\begin{array}{ll} a_t = \alpha R = \frac{g\sin\theta}{2} & \rightarrow \quad a_t(10°) = 0.85 \text{ m/s}^2 \\ a_r = \omega^2 R = g(1-\cos\theta) & \rightarrow \quad a_r(10°) = 0.15 \text{ m/s}^2 \end{array}$$

Reazione normale e forza di attrito si ricavano proiettando le forze agenti sulla massa puntiforme su un asse x tangenziale alla superficie del cilindro e un asse y radiale:

$$\left\{ \begin{array}{l} -N + \frac{M}{2}g\cos\theta = \frac{M}{2}g(1-\cos\theta) \\ \frac{M}{2}g\sin\theta - F_a = \frac{Mg\sin\theta}{4} \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} N(10°) = 4.8 \text{ N} \\ F_a(10°) = 0.43 \text{ N} \end{array} \right.$$

La massa puntiforme non striscia finché è verificata la condizione $F_a \leq \mu_s N$:

$$\frac{M}{4}g\sin\theta \leq \mu_s\frac{Mg}{2}(2\cos\theta - 1) \quad \rightarrow \quad \sin\theta_{max} = 2\mu_s(2\cos\theta_{max} - 1)$$

Elevando al quadrato (assumiamo come accettabili soluzioni con $\theta < 90°$), si ottiene la soluzione

$$\cos\theta_{max} = \frac{8\mu_s^2 \pm \sqrt{1+12\mu_s^2}}{1+16\mu_s^2} \quad \rightarrow \quad \theta_{max} = 28°$$

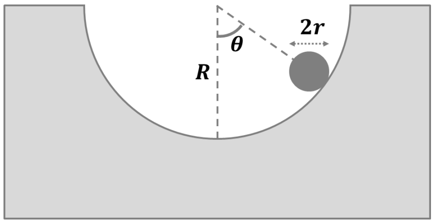
avendo scartato la soluzione $\theta_{max} = 107° > 90°$.

Esercizio 8 - Il posacenere

Il sistema mostrato in figura è costituito da un posacenere di massa M che ha la forma di un cilindro con una cavità sferica di raggio R nella faccia superiore. Una sferetta di massa m e raggio r è lasciata libera di oscillare all'interno del posacenere, partendo da ferma nella posizione corrispondente a $\theta = \theta_0$, dove θ è l'angolo formato con l'asse di simmetria del posacenere dalla retta passante per i centri della cavità e della sferetta. Studiare il moto del sistema posacenere-sferetta, ricavando in particolare il periodo delle piccole oscillazioni, nei seguenti casi:

a. l'attrito tra il posacenere ed il piano d'appoggio è sufficiente a mantenere il posacenere fermo nella posizione iniziale durante tutto il moto della pallina;

b. tra il posacenere ed il piano d'appoggio non c'è attrito;



Soluzione

a. Nel primo caso il sistema è costituito dalla sola sferetta, assumendo un rotolamento puro il moto è caratterizzato da un solo grado di libertà , quindi è sufficiente una sola equazione. Poiché l'attrito non compie lavoro l'energia meccanica si conserva, quindi $E(\theta) = E(\theta_0)$. L'energia potenziale e l'energia cinetica della sferetta sono date da:

$$\begin{cases} V(\theta) = mg(R-r)(1-\cos\theta) \\ K(\theta) = \frac{1}{2}mv_\theta^2 + \frac{1}{2}I\omega_\theta^2 \end{cases}$$

dove il momento d'inerzia I della sfera, la velocità v_θ del suo centro di massa e la velocità angolare ω_θ della rotazione rispetto al centro di massa sono date da:

$$\begin{cases} I = \frac{2}{5}mr^2 \\ v_\theta = (R-r)\dot{\theta} \\ \omega_\theta = \frac{v_\theta}{r} = \frac{R-r}{r}\dot{\theta} \end{cases}$$

Si ottiene quindi:

$$\dot{\theta}^2 + \frac{10}{7}\frac{g}{R-r}(\cos\theta_0 - \cos\theta) = 0$$

Derivando:

$$2\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{10}{7}\frac{g}{R-r}\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

Infine, considerando che $\dot{\theta} \neq 0$ durante il moto, si ricava l'equazione differenziale di un pendolo:

$$\ddot{\theta} + \frac{5}{7}\frac{g}{R-r}\sin\theta = 0$$

Nel limite delle piccole oscillazioni ($\sin\theta \simeq \theta$) la sferetta compie quindi un moto armonico il cui periodo è

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}$$

b. Nel secondo caso tra il posacenere ed il piano d'appoggio non c'è attrito, il sistema ha due gradi di libertà e quindi servono due equazioni per descriverne il moto. Poiché non c'è attrito l'energia meccanica si conserva ($E(\theta_0) = E(\theta_0)$), inoltre l'unica forza esterna che agisce sul sistema è la reazione vincolare del piano d'appoggio, diretta verticalmente, quindi si conserva anche la componente orizzontale della quantità di moto ($Q_x = cost.$).

- *Conservazione della quantità di moto*
  la componente orizzontale della quantità di moto iniziale del sistema è nulla, quindi $Q_x(t) = (M+m)\dot{x}_{CM} = 0$, cioè il centro di massa rimane fermo durante tutto il moto. La conservazione della componente orizzontale della quantità di moto nel sistema di riferimento inerziale del centro di massa è data da:

$$M\dot{x}_p + m\dot{x}_s = 0 \tag{1}$$

  dove $\dot{x}_p$ è la velocità del posacenere e $\dot{x}_s$ la componente orizzontale di quella della sferetta.
  Nel sistema di riferimento del posacenere la velocità della sferetta è $v'_s = (R-r)\dot{\theta}$ e la sua componente orizzontale è $\dot{x}'_s = (R-r)\dot{\theta}\cos\theta$. Passando al sistema di riferimento inerziale si ottiene infine:

$$\dot{x}_s = \dot{x}'_s + \dot{x}_p = (R-r)\dot{\theta}\cos\theta + \dot{x}_p$$

  e sostituendo nella (1):

$$(M+m)\dot{x}_p + m(R-r)\dot{\theta}\cos\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{x}_p = -\frac{m(R-r)}{M+m}\dot{\theta}\cos\theta \tag{2}$$

- *Conservazione dell'energia meccanica*
  L'energia meccanica del sistema è:

$$E(\theta) = mg(R-r)(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}M\dot{x}_p^2 + \frac{1}{2}mv_\theta^2 + \frac{1}{2}I\omega_\theta^2 \tag{3}$$

  dove $I = \frac{2}{5}mr^2$ e $\omega_\theta = \frac{R-r}{r}\dot{\theta}$ come nel caso *a.*
  La velocità $\vec{v}_\theta$ del centro di massa della sferetta nel sistema di riferimento inerziale si ottiene da:

$$\vec{v}_\theta = \vec{v}'_\theta + \vec{v}_p$$

  dove $\vec{v}_p$, diretta orizzontalmente, ha modulo $v_p = \dot{x}_p$ e nel sistema di riferimento del posacenere $v'_\theta = (R-r)\dot{\theta}$. Le componenti di $\vec{v}_\theta$ sono quindi:

$$\begin{cases} \dot{x}_s = (R-r)\dot{\theta}\cos\theta + \dot{x}_p \\ \dot{y}_s = (R-r)\dot{\theta}\sin\theta \end{cases} \rightarrow \; v_\theta^2 = \dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2 = \dot{x}_p^2 + 2\dot{x}_p(R-r)\dot{\theta}\cos\theta + (R-r)^2\dot{\theta}^2$$

  Sostituendo le espressioni per I, ω_θ e v_θ^2 nella (3) si ottiene quindi:

$$E(\theta) = mg(R-r)(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}_p^2 + m(R-r)\dot{x}_p\dot{\theta}\cos\theta + \frac{7}{10}m(R-r)^2\dot{\theta}^2$$

  Infine per la conservazione dell'energia ($E(\theta) = E(\theta_0)$):

$$\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}_p^2 + m(R-r)\dot{x}_p\dot{\theta}\cos\theta + \frac{7}{10}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 + mg(R-r)(\cos\theta_0 - \cos\theta) = 0$$

Sostituendo in quest'ultima l'espressione (2) per $\dot{x}_p$ si ricava:

$$-\frac{m}{M+m}(R-r)\dot{\theta}^2\cos^2\theta + \frac{7}{5}(R-r)\dot{\theta}^2 + g(\cos\theta_0 - \cos\theta) = 0$$

Derivando:

$$-\frac{m}{M+m}(R-r)(2\dot{\theta}\ddot{\theta} - 2\dot{\theta}^3\sin\theta\cos\theta) + \frac{7}{5}(R-r)2\dot{\theta}\ddot{\theta} + g\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

Infine semplificando i fattori $\dot{\theta}$ e passando al limite delle piccole oscillazioni, ossia trascurando tutti i termini di ordine superiore a θ ($\sin\theta \simeq \theta$; $\cos\theta \simeq 1$; $\dot{\theta}^2\theta \simeq 0$), si ottiene:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\left(\frac{7}{5} - \frac{m}{M+m}\right)(R-r)}\theta = 0$$

che è l'equazione di un oscillatore armonico di periodo:

$$T = 2\pi\sqrt{\left(\frac{7}{5} - \frac{m}{M+m}\right)\frac{M-m}{g}}$$

Da notare che nel limite $M \to \infty$ l'espressione del periodo coincide con quella del caso a.
Per la (2) anche il posacenere nel limite delle piccole oscillazioni compie un moto armonico con lo stesso periodo.