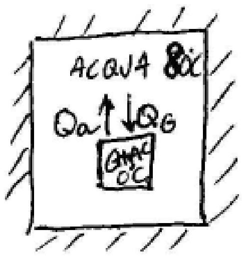
Esercitazione 7

Esercizio 1

Una massa $m_g = 20$ g di ghiaccio a 0°C è contenuta in un recipiente termicamente isolato. Successivamente viene aggiunta una massa $m_a = 80$ di acqua a 80°C. Quale sarà, all'equilibrio, la temperatura T_F del sistema? (calore specifico dell'acqua: $c_a = 1$ cal/(g°C); calore latente di fusione del ghiaccio: $\lambda_f = 79.7$ cal/g)

Soluzione



Il sistema è isolato, quindi l'energia totale si conserva. Applicando il primo principio della termodinamica si ottiene:

$$\Delta U_a + \Delta U_g = Q_a - L_a + Q_g - L_g = 0$$

Inoltre sia l'acqua che il ghiaccio non compiono lavoro ($L_a = L_g = 0$), quindi scrivendo esplicitamente i calori scambiati si ricava:

$$Q_a + Q_g = m_a c_a (T_F - T_a) + m_g \lambda_f + m_g c_a (T_F - T_g) = 0$$

da cui si ricava:

$$T_F = \frac{m_a c_a T_a - m_g \lambda_f + m_g c_a T_g}{(m_a + m_g) c_a} = 48°\text{C}$$

Esercizio 2

Un proiettile di massa $m = 200$ g è sparato con velocità $v_1 = 150$ m/s contro un blocco di ghiaccio di massa pari a $M = 5$ kg, inizialmente in quiete su un piano liscio orizzontale. Il proiettile si ferma nel blocco. Calcolare con che velocità v_2 si mette in moto il blocco e quanto ghiaccio (m_g) fonde nell'urto. (calore latente di fusione del ghiaccio: $\lambda_f = 79.7$ cal/g)

Soluzione

Nell'urto si conserva la quantità di moto totale del sistema, quindi:

$$m v_1 = (m - M) v_2 \quad \rightarrow \quad v_2 = \frac{m}{m + M} v_1 = 5.77 \text{ m/s}$$

Poiché l'urto è anelastico l'energia meccanica, invece, non si conserva e viene assorbita dal blocco di ghiaccio sotto forma di calore:

$$Q = -\Delta K = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2}(m + M) v_2^2 = 517.6 \text{ cal}$$

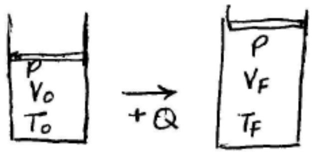
La massa di ghiaccio che fonde a causa del calore assorbito è quindi:

$$m_g = \frac{Q}{\lambda_f} = 6.49 \text{ g}$$

Esercizio 3

Dell'azoto gassoso (N_2; $c_V = \frac{5}{2}R$; p.m. 28 g/mol) è contenuto in un cilindro chiuso superiormente da un pistone libero di scorrere. Inizialmente il gas occupa un volume $V_0 = 2$ l ad una temperatura $T_0 = 27°$C e con una pressione $P = 1$ atm. Il gas viene scaldato fino ad occupare un volume $V_f = 2.5$ l. Calcolare la massa M di gas contenuta nel cilindro, il lavoro fatto dal gas e la quantità di calore scambiata dal gas nel processo.

Soluzione



$$n = \frac{P_0 V_0}{R T_0}$$

$P_0 = 1\,\text{atm} = 1{,}013 \cdot 10^5\,\text{Pa}$

$V_0 = 2{,}0\,\text{dm}^3 \cdot 10^{-3}\frac{\text{m}^3}{\text{dm}^3} = 2 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3$

$T_0 = 27\,°\text{C} + 273\,\text{K} = 300\,\text{K}$

$$n = \frac{1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{8{,}314 \cdot 300} = 8{,}12 \cdot 10^{-2}\,\text{mol}$$

$$M = M_{mol} \cdot n = 28\frac{\text{g}}{\text{mol}} \cdot 8{,}12 \cdot 10^{-2}\,\text{mol} = 2{,}27\,\text{g}$$

Processo isobaro ($P = \text{cte}$)

$$L = \int P\,dV = P_0 \int_{V_i}^{V_f} dV = P_0 (V_f - V_i) = 1{,}013 \cdot 10^5 (2{,}5 \cdot 10^{-3} - 2{,}0 \cdot 10^{-3}) = 50{,}65\,\text{J} > 0$$

Come $V_f > V_i$ (espansione) il gas fa un lavoro positivo

Per calcolare il calore scambiato usiamo il primo principio

$$Q = L + \Delta U = L + n c_v (T_f - T_0)$$

Per calcolare T_f usiamo l'equazione di stato

$$\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{P_f V_f}{T_f} \rightarrow T_f = \frac{V_f P_f}{V_0 P_0} T_0 = \frac{2{,}5}{2{,}0} \cdot 300 = 375\,\text{K}$$

$$Q = 50{,}65\,\text{J} + 8{,}12 \cdot 10^{-2}\,\text{mol} \cdot \frac{5}{2} 8{,}31 \cdot (375 - 300) \simeq 51\,\text{J} + 126\,\text{J} \simeq 177\,\text{J}$$

È interessante notare che il calore scambiato si può scrivere come

$$Q = L + \Delta U = P V_f - P V_0 + n c_v (T_F - T_0) = nR(T_F - T_0) + n c_v (T_F - T_0)$$

$$Q = n(R + c_v)(T_F - T_0) = n c_p (T_F - T_0)$$

dove $c_p = c_v + R = \frac{7}{2}R$ è il calore specifico molare a pressione costante

▸ Per riscaldare un gas a pressione costante il calore necessario è maggiore che per riscaldarlo a volume costante

Esercizio 4

Un gas biatomico (O_2) è contenuto in un recipiente chiuso superiormente da un pistone, di area $S = 200$ cm^2 e massa nulla, attaccato ad una molla. Inizialmente il gas occupa un volume $V_0 = 5$ l, si trova ad una temperatura $T_0 = -30°$C e ad una pressione $P_0 = 1$ atm. Il sistema si mette in contatto con l'ambiente e arriva all'equilibrio termico con esso a $T_f = 27°$C, comprimendo la molla di una lunghezza $\Delta h = 2$ cm. Calcolare la pressione finale del gas (P_f), il volume finale (V_f), la costante elastica della molla (k), il calore scambiato con l'ambiente (Q) e il lavoro fatto dal gas (L).

Soluzione

Il gas scambia calore con l'ambiente fino ad arrivare alla temperatura di equilibrio $T_F = 27°$C $= 300$ K e si espande fino ad occupare il volume $V_F = V_0 + \Delta V$, dove $\Delta V = S\Delta h = 4 * 10^{-4}$ m^3, quindi $V_F = 5.4 * 10^{-3}$ m^3.
Per calcolare la pressione finale si usa l'equazione di stato, infatti nel processo n rimane costante quindi è costante il rapporto PV/T, allora:

$$\frac{P_F V_F}{T_F} = \frac{P_0 V_0}{T_0} \quad \rightarrow \quad P_F = P_0 \frac{T_F}{T_0}\frac{V_0}{V_F} = 1.16 * 10^5 \text{ Pa.}$$

Alla fine del processo la risultante delle forze sul pistone deve essere nulla, quindi la forza verso l'alto dovuta all'aumento di pressione deve essere compensata dalla forza elastica applicata su di esso dalla molla:

$$\Delta P S = k\Delta h \quad \rightarrow \quad k = \frac{\Delta P S}{\Delta h} = 1.45 * 10^4 \text{ N/m.}$$

Il lavoro è dato da:

$$L = \int_{V_0}^{V_F} P dV = \int_0^{\Delta h} \left(P_0 + \frac{kx}{S}\right) S dx = P_0 \Delta V + \frac{1}{2} k h^2 = 43.4 \text{ J,}$$

che è proprio la somma del lavoro necessario per l'espansione libera (vedi esercizio 3) più quello che serve per comprimere la molla.
Infine $Q = L + \Delta U$, con

$$\Delta U = n c_V \Delta T = \frac{P_0 V_0}{R T_0}\frac{5}{2} R(T_F - T_0) = 297.0 \text{ J,}$$

quindi $Q = 43.4$ J $+297.0$ J $= 340.4$ J.

Esercizio 5

Un recipiente chiuso, isolato dall'esterno, di 3 l di volume contiene azoto gassoso ad una temperatura di 300 K e ad una pressione di 1 atm. All'interno del recipiente c'è un disco di rame di 20 cm di raggio e 1 kg di massa. Inizialmente il disco di rame ruota con una frequenza di 9000 giri per minuto, ma dopo un po', a causa dell'attrito con il gas, si ferma. Calcolare (calore specifico del rame: $c = 24.5$ J mol^{-1}K^{-1}; massa molecolare del rame MW=63.54 g mol^{-1}):

a. il calore, il lavoro e la variazione di energia interna del sistema disco-gas;
b. la temperatura finale del sistema e la pressione finale del gas;
c. il calore scambiato, il lavoro fatto e la variazione di energia interna del gas.

Soluzione

a. Il sistema disco-gas è isolato, quindi non scambia calore: $Q_{tot} = 0$; inoltre il volume del sistema non cambia e su di esso non agiscono forze esterne, quindi alche $L_{tot} = 0$; infine per il primo principio della termodinamica $\Delta U_{tot} = Q_{tot} - L_{tot} = 0$;

b. Poiché $\Delta U_{tot} = \Delta U_g + \Delta U_d = 0$, dove

$$\begin{cases} \Delta U_g = nc_V(T_F - T_0) \\ \Delta U_d = \Delta K + m\frac{c}{MW}(T_F - T_0) = -\frac{1}{2}I\omega^2 + M\frac{c}{MW}(T_F - T_0) \end{cases},$$

$I = \frac{1}{2}MR^2$ e il numero di moli di gas è

$$n = \frac{RT_0}{P_0V_0} = 0.122$$

si ricava:

$$T_F = T_0 + \frac{\frac{1}{4}MR^2\omega^2}{nc_V + M\frac{c}{MW}} = 322.9 \text{ K}$$

Quindi, poiché il numero di moli e il volume del gas rimangono costanti

$$\frac{P_F}{T_F} = \frac{P_0}{T_0} \quad \rightarrow \quad P_F = \frac{T_F}{T_0}P_0 = 1.08 \text{ atm}$$

c. La variazione di energia interna del gas è

$$\Delta U_g = nc_V(T_F - T_0) = 58 \text{ J}$$

Poiché non è a contatto con nessuna sorgente, il gas non scambia calore durante il processo, quindi $Q_g = 0$ e $L_g = -\Delta U_g = -58$ J per il primo principio della termodinamica.

Esercizio 6

Una mole di He ha una temperatura iniziale T_A ed occupa un volume V_A. Il gas subisce una trasformazione isoterma fino ad occupare un volume $V_B = 2V_A$. Poi subisce un'altra trasformazione adiabatica fino ad arrivare ad una pressione uguale a quella iniziale ($P_C = P_A$). Calcolare le temperature e i volumi del gas negli stati B e C, così come il calore scambiato (Q), il lavoro fatto (L) nel provesso e la variazione di energia interna del gas.

Soluzione

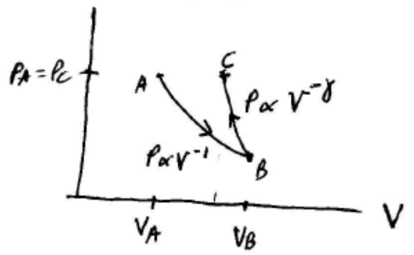
Disegniamo i processi nel diagramma P-V

Il primo processo (A → B) è isotermo e quindi $PV = cost \rightarrow P \propto V^{-1}$

Il secondo processo (B → C) è adiabatico e quindi $PV^{\gamma} = cost \rightarrow P \propto V^{-\gamma}$

dove $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{\frac{5}{2}R}{\frac{3}{2}R} = \frac{5}{3} > 1$ (per un gas monoatomico)

Siccome $\gamma > 1$, deve essere $V_C > V_A$ ($P_A = P_C$)



▸ Calcoliamo le temperature, pressioni e volumi nei tre stati A, B, C

(A) → $T_A, V_A, n \rightarrow P_A = \frac{nRT_A}{V_A}$

(B) → Il processo $A \rightarrow B$ è isotermo $\rightarrow T_B = T_A$

$P_A V_A = P_B V_B \rightarrow P_B = \frac{P_A}{2}$

$V_B = 2V_A$

(C) → Il processo $B \rightarrow C$ è adiabatico

$$\left.\begin{array}{l} P_C V_C^{\gamma} = P_B V_B^{\gamma} \\ P_C = P_A \\ V_B = 2V_A \end{array}\right\} V_C = \left(\frac{P_B}{P_C}\right)^{1/\gamma} V_B \rightarrow V_C = \left(\frac{1}{2}\right)^{3/5} V_B = \left(\frac{1}{2}\right)^{3/5} 2V_A$$

$$V_C = 1{,}32\, V_A$$

▸ Calcoliamo il lavoro fatto, la variazione di energia interna ed il calore scambiato in ogni processo

$L_{AB} = \int_A^B P\,dV$ → siccome $A \rightarrow B$ è un processo isotermo $PV = nRT_A = cost$

$$P = \frac{nRT_A}{V}$$

$$L_{AB} = nRT_A \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = nRT_A \ln\frac{V_B}{V_A} = nRT_A \ln 2$$

In un processo isotermo (T= cost) non varia l'energia interna

$\Delta U_{AB} = 0$

Usando il Primo Principio calcoliamo il calore scambiato

$Q_{AB} = L_{AB} + \Delta U_{AB} = L_{AB} = nRT_A \ln 2 > 0$

Durante l'espansione isoterma $A \to B$ viene dato calore al gas ($Q_{AB} > 0$) e questo fa un lavoro ($L_{AB} > 0$)

- Il processo $B \to C$ è adiabatico, quindi $Q_{BC} = 0$

Usando il Primo Principio $Q_{BC} = L_{BC} + \Delta U_{BC} = 0$

$L_{BC} = -\Delta U_{BC}$

La variazione di energia interna dipende soltanto della variazione di temperatura

$\Delta U_{BC} = nC_V (T_C - T_B)$ → Notare che anche se non si tratta di un processo a volume costante, la variazione di energia interna si calcola usando C_V

gas monoatomico → $C_V = \frac{3}{2}R$

$T_C = 1{,}32\, T_A$

$\Delta U_{BC} = \frac{3}{2} nR \cdot 0'32 T_A > 0$ Durante la compressione adiabatica $B \to C$ il gas si riscalda ed aumenta l'energia interna

$L_{BC} = -\Delta U_{BC} = -\frac{3}{2} nR \cdot 0'32 T_A < 0$ → si fa un lavoro sul gas per comprimerlo

$L_{TOT} = L_{AC} = L_{AB} + L_{BC} = nRT_A \ln 2 - \frac{3}{2} nR \cdot 0'32 T_A > 0$

$Q_{TOT} = Q_{AC} = Q_{AB} + Q_{BC} = nRT_A \ln 2 > 0$

$\Delta U_{TOT} = \Delta U_{AC} = \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} = \frac{3}{2} nR \cdot 0'32 T_A > 0$

Esercizio 7

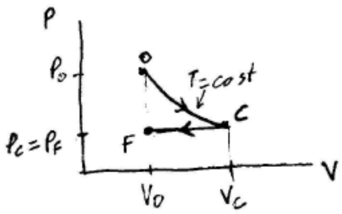
Dell'elio gassoso è contenuto in un cilindro chiuso superiormente da un pistone libero di scorrere senza attrito. Inizialmente il gas occupa un volume $V_0 = 48$ l ad una temperatura $T_0 = 310$ K e con una pressione $P_0 = 2$ atm. Il gas effettua un'espansione isoterma fino ad occupare un volume $V_C = 106$ l e poi subisce una compressione isobara fino a tornare ad occupare il volume iniziale V_0. Calcolare la variazione di energia interna del gas ed il lavoro fatto dal gas in ciascuna delle due trasformazioni, così come il lavoro totale.

Soluzione

Disegniamo i processi nel piano P-V

$O \to C$: espansione isoterma $\to PV = nRT = cost \to P \propto \frac{1}{V}$

$C \to F$: compressione isobara $\to P = cost$



▷ Usando i valori iniziali P_0, V_0, T_0 possiamo ricavare n

$$n = \frac{P_0 V_0}{R T_0} = \frac{2{,}026 \cdot 10^5 \, Pa \cdot 48 \cdot 10^{-3} \, m^3}{8{,}314 \frac{J}{mol\,K} 310\,K} = 3{,}77 \text{ moles}$$

▷ Durante l'espansione isoterma $\Delta U_{OC} = 0 \to Q_{OC} = L_{OC}$

$$L_{OC} = \int_O^C P\,dV = nRT_0 \int_{V_0}^{V_C} \frac{dV}{V} = nRT_0 \ln \frac{V_C}{V_0} = 7698 \text{ J}$$

$Q_{OC} = 7698$ J

▷ Durante la compressione isobara $C \to F$

$$L_{CF} = P_C (V_F - V_C) =$$

Dobbiamo calcolare $P_C \to$ equazione di stato $\to P_0 V_0 = P_C V_C$ ($O \to C$ processo isotermo)

$$P_C = \frac{P_0 V_0}{V_C} = \frac{2{,}026 \cdot 10^5 \, Pa \cdot 48 \cdot 10^{-3} \, m^3}{0{,}106 \, m^3} = 9{,}17 \cdot 10^4 \, Pa$$

$$L_{CF} = 9{,}17 \cdot 10^4 \, Pa \, (0{,}048 \, m^3 - 0{,}106 \, m^3) = -5321 \text{ J} < 0$$ (lavoro fatto sul gas durante la compressione)

Per calcolare la variazione d'energia interna dobbiamo calcolare T_F

$$T_F = \frac{P_F V_F}{nR} = \frac{9{,}17 \cdot 10^4 \, Pa \cdot 0{,}048 \, m^3}{3{,}77 \, mol \cdot 8{,}314 \frac{J}{mol\,K}} = 140{,}4 \text{ K}$$

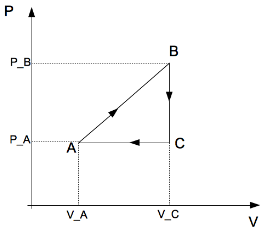
$$\Delta U_{CF} = n c_V (T_F - T_C) = 3'77 \cdot \frac{3}{2} 8'314 \cdot (140{,}4 - 310) = -7974 \text{ J}$$

$$Q_{CF} = L_{CF} + \Delta U_{CF} = -13295 \text{ J}$$

▷ Il lavoro totale sarà

$$L_{TOT} = L_{OC} + L_{CF} = 7698 \text{ J} - 5321 \text{ J} = 2377 \text{ J} > 0$$ (fatto dal gas)

Esercizio 8
Un gas perfetto monoatomico compie il ciclo schematicamente mostrato in figura, attraverso trasformazioni reversibili. I valori di pressione e volume sono i seguenti: $P_A = 2 \cdot 10^5$ Pa, $V_A = 2$ l, $P_B = 5P_A$, $V_C = 3V_A$. Calcolare il rendimento η del ciclo.



Soluzione

Il rendimento è definito da $\eta = L/Q_{ass}$.
Il lavoro compiuto nel ciclo è pari all'area del triangolo $\widehat{ABC}$:

$$L = \frac{1}{2}\bar{AC}\bar{BC} = 4V_A P_A = 1600\,\mathrm{J}$$

Il calore viene assorbito nel tratto $\bar{AB}$ e si ottiene dal primo principio:

$$Q_{ass} = Q_{AB} = L_{AB} + \Delta U_{AB} = Area_{ABV_AV_C} + nc_V(T_B - T_A)$$

dove

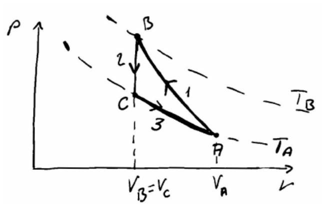
$$Area = L + V_A\bar{V}_C A\bar{V}_A = 2400\,\mathrm{J}$$

$$\Delta U_{AB} = nc_V\left(\frac{P_BV_B}{nR} - \frac{P_AV_A}{nR}\right) = 21P_AV_A = 8400\,\mathrm{J}$$

da cui $Q_{ass} = 10800$J e $\eta = 15\%$

Esercizio 9
Un gas perfetto biatomico è contenuto in un cilindro chiuso da un pistone. Inizialmente, si trova nello stato caratterizzato da $T_A = 300$ K, $V_A = 4$ l, $P_A = 1$ atm. Il gas viene poi compresso adiabaticamente fino a $V_B = 1$ l, poi raffreddato a volume costante finché la temperatura non raggiunge il valore iniziale T_A. Il gas viene infine lasciato espandere isotermicamente fino al volume iniziale V_A. Disegnare il ciclo nel piano di Clapeyron e calcolare il lavoro totale.

Soluzione



$$L = L_{AB} + L_{BC} + L_{CA} = -\Delta U_{AB} + L_{CA} = nc_V(T_A - T_B) + nRT_A \ln\frac{V_A}{V_C}$$

Dobbiamo ricavare $T_B = (P_BV_B)/(nR)$:

$$\begin{cases} nR = \frac{P_AV_A}{T_A} = 1.35\,\mathrm{JK}^{-1} \\ P_AV_A^\gamma = P_BV_B^\gamma \to P_B = 4^{\frac{7}{5}}P_A \\ T_B = 4^{\frac{7}{5}}\frac{P_AV_B}{nR} = 522.96\,\mathrm{K} \end{cases} \quad \to \quad L = \frac{5}{2}nR(T_A - T_B) + nRT_A \ln 4 = -189.79\,\mathrm{J}$$