Esercitazione 8

Esercizio 1 - Macchina di Carnot
Una macchina di Carnot assorbe una certa quantità di calore Q_1 da una sorgente a temperatura T_1 e cede calore Q_2 ad una seconda sorgente a temperatura $T_2 = 40\% T_1$. Determinare il rendimento η della macchina, il lavoro compiuto durante il ciclo e il calore ceduto.

Soluzione

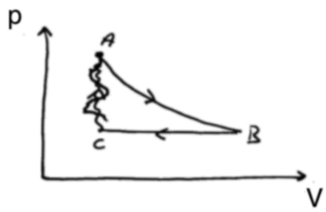
Il rendimento di una macchina di Carnot in funzione delle temperature è:

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - 0.4 = 60\%$$

Il lavoro compiuto nel ciclo è $L = \eta Q_1$; il calore assorbito è $|Q_2| = |Q_1|(1-\eta)$.

Esercizio 2 - Isocora irreversibile
Una mole di gas perfetto monoatomico compie un ciclo tra gli stati ABCA, secondo le seguenti trasformazioni: A $\rightarrow$ B isoterma reversibile, B $\rightarrow$ C isobara reversibile e C $\rightarrow$ A isocora irreversibile, durante la quale il sistema viene riportato nello stato A mediante il solo scambio di calore Q_{CA} ($L_{CA} = 0$ J). Disegnare il ciclo nel piano PV, calcolare il calore scambiato in ciascuna trasformazione e il calore totale (in modulo e segno), calcolare il lavoro compiuto in ciascuna trasformazione e il lavoro totale (in modulo e segno).
Dati: $V_A = 5$ l, $V_B = 10$ l, $P_A = 1$ atm, $P_B = 0.5$ atm.

Soluzione



Le quantità richieste sono espresse dalle relazioni:

$$\begin{array}{ll}
A \rightarrow B: & Q_{AB} = L_{AB} = nRT_A \ln \frac{V_B}{V_A} = P_A V_A \ln \frac{V_B}{V_A} = P_A V_A \ln 2 = 351.08 \text{ J} \\
B \rightarrow C: & Q_{BC} = nc_P(T_C - T_B) = nc_P(T_C - T_A) \\
 & L_{BC} = P_B(V_C - V_B) = P_B(V_A - V_B) \\
C \rightarrow A: & L_{CA} = 0 \\
 & Q_{CA} = nc_V(T_A - T_C)
\end{array}$$

Dove, utilizzando l'equazione di stato dei gas perfetti nello stato A e imponendo $\frac{T}{V} = cost.$ nella trasformazione B $\rightarrow$ C:

$$\begin{cases} T_A = \frac{P_A V_A}{nR} = 60.85 \text{ K} \\ T_C = T_B \frac{V_C}{V_B} = T_A \frac{V_A}{V_B} = \frac{1}{2} T_A \end{cases}$$

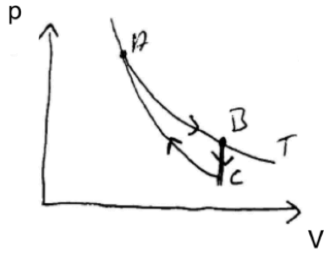
Quindi:

$$\begin{array}{lll}
A \rightarrow B: & Q_{AB} = 351.08 \text{ J} & L_{AB} = 351.08 \text{ J} \\
B \rightarrow C: & Q_{BC} = -633.12 \text{ J} & L_{BC} = -253.25 \text{ J} \\
C \rightarrow A: & Q_{CA} = 379.87 \text{ J} & L_{CA} = 0 \\
\text{ciclo ABCA}: & Q_{tot} = 97.83 \text{ J} & L_{tot} = 97.83 \text{ J}
\end{array}$$

Nota bene: $Q_{tot} = L_{tot}$, infatti in un ciclo $\Delta U_{tot} = 0$J.

Esercizio 3 - Ciclo reversibile
Una mole di gas perfetto monoatomico compie il seguente ciclo: A → B isoterma reversibile, B → C isocora reversibile, C → A compressione adiabatica reversibile. Disegnare il ciclo nel piano PV, calcolare il calore totale scambiato e il rendimento η del ciclo.
Dati: $T_A = 400$ K, $V_B = 2V_A$.

Soluzione



La temperatura T_C si ricava utilizzando l'adiabatica C → A:

$$T_C V_C^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1} \quad \rightarrow \quad T_C = T_A \left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} T_A = 251.98 \text{ K}$$

Il calore totale scambiato in ciascuna trasformazione è:

$$\begin{cases} Q_{AB} = L_{AB} = nRT_A \ln \frac{V_B}{V_A} = nRT_A \ln 2 \\ Q_{BC} = nc_V(T_C - T_B) = nc_V(T_C - T_A) \\ Q_{CA} = 0 \end{cases}$$

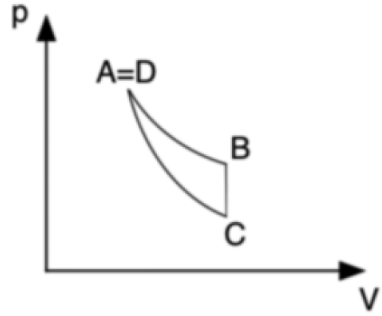
Quindi il calore totale scambiato è $Q_{tot} = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = 459$ J.
Infine il rendimento del ciclo è:

$$\eta = \frac{L}{Q_{ass}} = \frac{Q_{tot}}{Q_{AB}} = 20\%$$

Esercizio 4 - Trasformazioni reversibili

Una mole di gas perfetto monoatomico è nello stato A ($T_A = 300$ K, $V_A = 1$ l). Il gas compie le seguenti trasformazioni reversibili: A $\rightarrow$ B isoterma fino a $V_B = 3V_A$, B $\rightarrow$ C isocora fino a $T_C = 144.2$ K e C $\rightarrow$ D compressione adiabatica fino a $V_D = V_A$. Disegnare le trasformazioni nel piano PV, determinare P (atm), V (l) e T (K) in ognuno dei 4 stati e determinare, in modulo e segno, il calore scambiato, il lavoro compiuto e la variazione di energia interna di ogni trasformazione. Se inoltre $D \equiv A$, calcolare il rendimento η del ciclo.

Soluzione



Stato A:

$$T_A = 300 \text{ K}; \quad V_A = 1 \text{ l}; \quad P_A = \frac{nRT_A}{V_A} = 2.49 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

Stato B:

$$T_B = T_A = 300 \text{ K}; \quad V_B = 3V_A = 3 \text{ l}; \quad P_B = \frac{nRT_B}{V_B} = \frac{P_A}{3} = 8.31 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Stato C:

$$T_C = 144.2 \text{ K}; \quad V_C = 3V_A = 3 \text{ l}; \quad P_C = \frac{nRT_C}{V_C} = 3.99 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Stato D:

$$T_D V_A^{\gamma-1} = T_C (3V_A)^{\gamma-1} \quad \rightarrow \quad T_D = 3^{2/3} T_C = 300 \text{ K}; = T_A; \quad V_D = V_A = 1 \text{ l}; \quad P_D = P_A$$

quindi lo stato $D \equiv A$.

Calori scambiati:

$$\begin{aligned} &Q_{AB} = L_{AB} = nRT_A \ln \tfrac{V_B}{V_A} = 2738.84 \text{ J} \\ &Q_{BC} = nc_V(T_C - T_B) = nc_V(T_C - T_A) = -1942.05 \text{ J} \\ &Q_{CA} = 0 \end{aligned}$$

Lavori compiuti:

$$\begin{aligned} &L_{AB} = Q_{AB} = 2738.84 \text{ J} \\ &L_{BC} = 0 \text{ J} \\ &L_{CA} = -\Delta U_{CA} = nc_V(T_C - T_A) = Q_{BC} = -1942.05 \text{ J} \end{aligned}$$

Variazioni di energia interna:

$$\begin{aligned} &\Delta U_{AB} = 0 \text{ J} \\ &\Delta U_{BC} = Q_{BC} = -1942.05 \text{ J} \\ &\Delta U_{CA} = -Q_{BC} = 1942.05 \text{ J} \end{aligned}$$

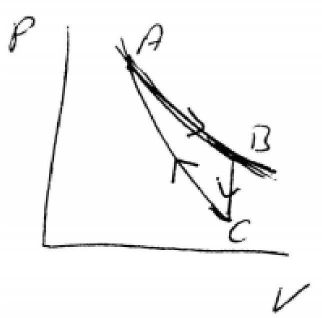
Nota bene: $\Delta U_{tot} = 0$ (ciclo).

Il rendimento del ciclo è:

$$\eta = \frac{L}{Q_{ass}} = \frac{Q_{tot}}{Q_{AB}} = 1 - \frac{|Q_{BC}|}{|Q_{AB}|} = 29\%$$

Esercizio 5 - Entropia
Una mole di gas perfetto monoatomico compie un ciclo formato dall'isoterma AB ($V_B = 5V_A$), da un'isocora BC e da un'adiabatica CA. Disegnare il ciclo nel piano PV e determinare la variazione di entropia lungo l'isocora BC.

Soluzione



Il ciclo è reversibile, dunque $\Delta S_{\text{tot}} = 0$; inoltre essendo $\Delta S_{CA} = 0$ (adiabatica):

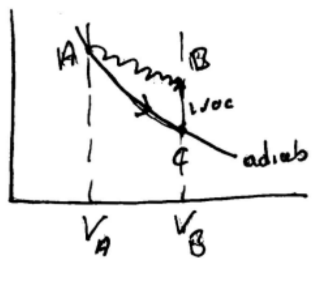
$$\Delta S_{\text{tot}} = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta S_{BC} = -\Delta S_{AB}$$

Infine:

$$\Delta S_{BC} = -\int_A^B \frac{\delta Q}{T} = \int_B^A \frac{dL}{T} = nR \int_{V_B}^{V_A} \frac{dV}{V} = -R \ln 5$$

Esercizio 6 - Entropia e trasformazione irreversibile
Tre moli di un gas perfetto monoatomico si trovano alla pressione P_A e alla temperatura T_A. In seguito ad una trasformazione irreversibile, il gas si porta in una nuova situazione di equilibrio B, nella quale il volume è raddoppiato e la temperatura è pari a $\frac{3}{2}T_A$. Calcolare la variazione di entropia del gas.

Soluzione
L'entropia è una funzione di stato, dunque la sua variazione non dipende dal tipo di trasformazione che connette lo stato iniziale allo stato finale. Poiché la trasformazione irreversibile non ci consente di utilizzare l'integrale di Clausius per il calcolo della ΔS, supponiamo che i due stati A e B siano connessi dalle seguenti trasformazioni reversibili (vedi figura): A $\rightarrow$ C adiabatica (isoentropica) e C $\rightarrow$ A isocora.



La temperatura dello stato C si ottiene dall'adiabatica A $\rightarrow$ C:

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} \quad \rightarrow \quad T_C = 2^{-2/3} T_A$$

La variazione di entropia è allora:

$$\Delta S_{AB} = \Delta S_{CB} = \int_C^B \frac{\delta Q}{T} = \int_C^B \frac{dU}{T} = nc_V \int_{T_C}^{T_B} \frac{dT}{T} = nc_V \ln \frac{T_B}{T_C} = \frac{9}{2} R \ln \left[\frac{3}{2^{1/3}}\right] = 32.44 \text{ J/K}$$

Esercizio 7 - Entropia e trasformazione irreversibile

Una mole di H_2 (gas perfetto) in equilibrio termodinamico alla temperatura $T_1 = 100$ K occupa il volume $V_1 = 10$ l. Tale sistema subisce una trasformazione che lo porta ad uno stato finale caratterizzato dalla temperatura $T_2 = 600$ K e dal volume $V_2 = 100$ l. Calcolare la variazione di entropia dell'ambiente nei seguenti casi:

a. la trasformazione è reversibile;

b. la trasformazione è irreversibile e viene effettuata mettendo a contatto il gas con una sorgente termica a temperatura $T_0 = 750$ K e lasciando espandere il gas contro una pressione esterna $P_0 = 0.49$ atm.

Soluzione

a. Se la trasformazione è reversibile la variazione di entropia dell'universo è nulla, quindi le variazioni di entropia di ambiente e gas sono uguali e opposte:

$$\Delta S_U = \Delta S_a + \Delta S_g = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta S_a = -\Delta S_g$$

Infine, utilizzando il primo principio:

$$\Delta S_a = -\int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_2^1 \frac{pdV + nc_V dT}{T} = nR\int_2^1 \frac{dV}{V} + nc_V \int_2^1 \frac{dT}{T} = -56.36 \text{ J/K}$$

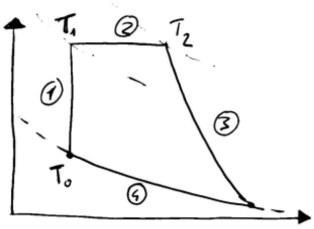
b. Se la trasformazione è irreversibile non è possibile utilizzare l'integrale di Clausius; tuttavia, poiché l'ambiente è costituito da un serbatoio:

$$\Delta S_a = \frac{\Delta Q_a}{T_0} = -\frac{\Delta Q_g}{T_0} = \frac{P_0 \Delta V + nc_V \Delta T}{T_0} = -19.82 \text{ J/K}$$

Esercizio 8 - Gas reale

Un gas reale di massa $m = 15$ g, $c_P = 0.210$ cal/g, $\gamma = 1.31$ esegue il seguente ciclo di trasformazioni reversibili a partire da $T_0 = 20°$C: isocora $0 \to 1$ fino a $T_1 = 300°$C, isobara $1 \to 2$ fino a $T_2 = 500°$C, adiabatica $2 \to 3$ e isoterma $3 \to 0$. Disegnare il ciclo nel piano PV e calcolare il rendimento η ed il lavoro durante il ciclo.

Soluzione



Il rendimento del ciclo è:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_c|}{|Q_a|} = 1 - \frac{|Q_{30}|}{|Q_{01} + Q_{12}|}$$

Il calore assorbito è:

$$Q_{01} = \Delta U_{01} = mc_V(T_1 - T_0) = m\tfrac{c_P}{\gamma}(T_1 - T_0) = 673.28 \text{ cal}$$
$$Q_{12} = mc_P(T_2 - T_1) = 630 \text{ cal}$$

Per il calcolo del calore ceduto Q_{30} si può utilizzare l'integrale di Clausius (il ciclo è reversibile), sapendo che $\Delta S = 0$ in un ciclo:

$$\Delta S = 0 = \int_0^1 \frac{\delta Q}{T} + \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} + \frac{Q_{30}}{T_0} = m\frac{c_P}{\gamma} \ln\left[\frac{T_1}{T_0}\right] + mc_P \ln\left[\frac{T_2}{T_1}\right] + \frac{Q_{30}}{T_0}$$

da cui

$$Q_{30} = -T_0 mc_P \ln\left[\frac{T_1^{\gamma-1}T_2}{T_0^{\gamma}}\right] = -748.87 \text{ cal}$$

Il rendimento è quindi $\eta = 0.42$.

Il lavoro è pari al calore totale scambiato durante il ciclo ($\Delta U = 0$ in un ciclo):

$$L = Q_{\text{tot}} = Q_{01} + Q_{12} + Q_{30} = 554.41 \text{ cal}$$

NB: Nei calcoli la temperatura va espressa in K.