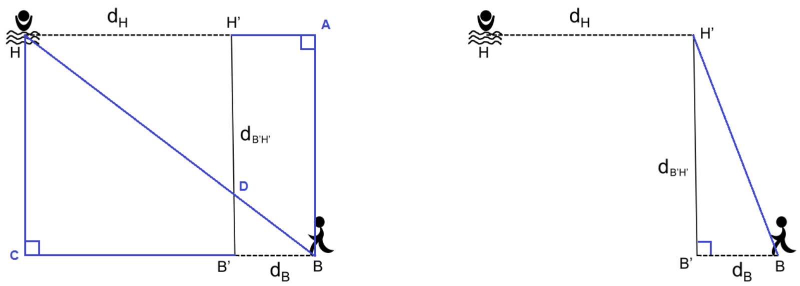
I ESERCITAZIONE

1. Moto rettilineo uniforme

Un bagnino B è sulla spiaggia a distanza $d_B = 50\,\mathrm{m}$ dalla riva e deve soccorrere un bagnante H che è in acqua a $d_H = 100\,\mathrm{m}$ dalla riva. La distanza tra il punto B' che sulla riva è il piú vicino al bagnino e il punto H' che sulla riva è il piú vicino al bagnante è $d_{B'H'} = 80\,\mathrm{m}$. Sapendo che B corre a velocità $v_1 = 5\,\mathrm{m/s}$ e nuota a $v_2 = 2\,\mathrm{m/s}$, determinare (in secondi s):

- il tempo che serve al bagnino per raggiungere il bagnante lungo la traiettoria piú breve;
- il tempo che serve al bagnino per raggiungere il bagnante nuotando il meno possibile.

Soluzione



- La traiettoria più breve è il segmento BH (figura a sinistra). Indicando con D l'intersezione tra BH e la riva, BH verrà percorso a piedi per un tratto BD e a nuoto per un tratto DH. La lunghezza dei due segmenti si ottiene osservando che i triangoli ABH e H'DH sono simili, cos come BCH e BB'D, valgono quindi le seguenti proporzioni:

$$\begin{aligned} \frac{d_{DH}}{d_{BH}} &= \frac{d_H}{d_{AH}} \\ \frac{d_{BD}}{d_{BH}} &= \frac{d_B}{d_{BC}} \end{aligned} \tag{1}$$

dove $d_{AH} = d_{BC} = d_B + d_H = 150\mathrm{m}$ e $d_{BH} = \sqrt{d_{AB}^2 + d_{AH}^2} = 170\mathrm{m}$. Quindi:

$$\begin{aligned} d_{DH} &= \frac{d_{BH}\, d_H}{d_{AH}} = 113\,m \\ d_{BD} &= \frac{d_{BH}\, d_B}{d_{BC}} = 57\,m \end{aligned} \tag{2}$$

Nota la lunghezza dei due segmenti, il tempo impiegato per raggiungere il bagnante si ottiene come

$$t = t_c + t_n = \frac{d_{BD}}{v_1} + \frac{d_{DH}}{v_2} = 68\,s \tag{3}$$

- La traiettoria che consente al bagnino di nuotare il meno possibile è data dalla composizione dei due segmenti BH' e H'H (figura a destra); di conseguenza, il tempo necessario a percorrere questa seconda traiettoria si ottiene come

$$t = t_c + t_n = \frac{d_{BH'}}{v_1} + \frac{d_{H'H}}{v_2} = \frac{\sqrt{d_{B'H'}^2 + d_B^2}}{v_1} + \frac{d_H}{v_2} = 69\,s \tag{4}$$

2. Moto uniformemente accelerato

Il motore di un'automobile può imprimere un'accelerazione massima $a_1 = 2\,\mathrm{m}/\,s^2$ e l'impianto frenante può decelerarla al massimo con $a_2 = -4\,\mathrm{m}/\,s^2$. Calcolare il tempo minimo necessario affinché l'auto, partendo da ferma, arrivi in un punto distante $s = 500\,\mathrm{m}$ dal punto di partenza con velocità nulla.

Soluzione

Indincando con t_1 l'istante in cui cessa l'azione accelerante del motore e ha inizio l'azione frenante, la velocità e lo spazio percorso dall'automobile sono dati da

$$\begin{array}{l} v(t) = a_1 t_1 + a_2(t - t_1) \\ s(t) = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 + v_1\,(t - t_1) + \frac{1}{2}a_2\,(t - t_1)^2 \end{array} \tag{5}$$

Tenuto conto che $v_1 = v(t_1) = a_1 t_1$ e che, all'istante finale, $v_f = 0$ m/s e $s_f = 500$ m, dal sistema precedente si ricava

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s_f}{a_1\left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right)}} = 18.25s; \quad t = \sqrt{\frac{2s_f}{a_1}\left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right)} = 27.39s \tag{6}$$

Notare che il rapporto tra t e t_1 (adimensionale) non dipende dallo spazio percorso, ma solamente dal rapporto tra le accelerazioni

$$\frac{t}{t_1} = \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right) \tag{7}$$

Nel nostro caso, troviamo che il tempo di frenata $(t - t_1)$ è pari alla metà del tempo di accelerazione t_1.

3. Legge oraria

Un punto si muove lungo l'asse x con legge oraria $x(t) = At^3 - 6Bt^2 + 3C$ con $A = 1$ m/s^3, $B = 1$ m/s^2 e $C = 1$ m. In quanti e quali istanti si annullano la velocità e l'accelerazione? Descrivere inoltre a parole il moto del punto dall'istante $t = 0$ all'istante $t = 10$ s.

Soluzione

La velocità e l'accelerazione sono rispettivamente

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 3At^2 - 12Bt = 3t(At - 4B) a(t) = \frac{dv}{dt} = 6At - 12B = 6(At - 2B) \quad (8)$$

da cui si ricava che la velocità si annulla negli istanti $t_0 = 0$ s e $t_3 = 4$ s, mentre l'accelerazione si annulla in $t_2 = 2$ s. La posizione si annulla in $t_1 = 0.76$ s e $t_4 = 5.91$ s. All'istante iniziale, il punto si trova in $x(0) = 3$ m con velocità nulla e accelerazione $a(0) = -12$ m/s^2. Negli istanti successivi, si muove lungo il verso negativo dell'asse x, passando per l'origine a t_1. Tra t_0 e t_2, velocità ed accelerazione sono entrambe negative. A t_2, l'accelerazione si annulla e la velocità ha, in modulo, un massimo. Dopo t_2, l'accelerazione è positiva e la velocità decresce in modulo, fino ad annullarsi in t_3. Qui il moto si inverte. Per $t > t_3$, il punto procede nella direzione positiva dell'asse x (l'origine viene nuovamente superata a t_4); velocità ed accelerazione sono entrambe positive.

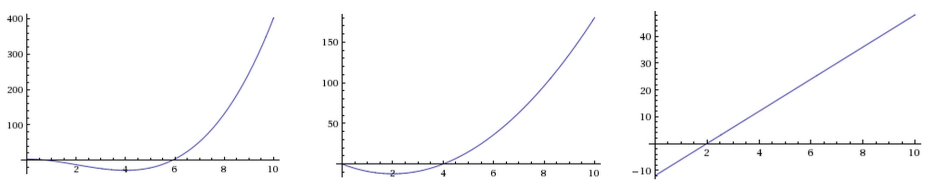


Figure 1: Posizione, velocità ed accelerazione del punto materiale in funzione del tempo, tra gli istanti $t = 0$ s e $t = 10$ s.

4. Studio di un moto con $v = f(t)$

La velocità di un punto che si muove sull'asse x è data da $v(t)=A(Bt-1)^4$ con $A=1$ m/s e $B=1$ s^{-1}. Studiare il moto sapendo che la posizione iniziale è $x(t=0) = x_0 = -0.2\,\mathrm{m}$.

Soluzione

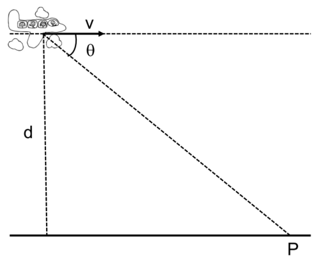
La posizione e l'accelerazione del punto sono date da

$$\begin{array}{l} x(t)=x_0 + \int_0^t v(t')\,dt' = x_0 + \frac{A}{5B}\left[(Bt-1)^5+1\right] = \frac{(t-1)^5}{5} \\ a(t)=4\,A\,B\,(Bt-1)^3 = 4(t-1)^3 \end{array} \quad (9)$$

Il punto parte da x_0 e si muove lungo la direzione positiva dell'asse x, raggiungendo l'origine a $t_1 = 1$ s; la velocità è positiva e si annulla a t_1; l'accelerazione è negativa fino a t_1, quando si annulla. Di conseguenza, il punto rallenta e raggiunge l'origine con velocità ed accelerazione nulle.

5. Moto dei gravi

Un aereo viaggia orizzontalmente alla velocità $v = 600\,\text{km/h}$ ad un'altezza $d = 1\,\text{km}$. All'istante $t = 0$ esso sgancia un oggetto che deve cadere in un punto prestabilito P. Calcolare sotto quale angolo rispetto all'orizzontale deve essere visto P dall'aereo al momento dello sgancio (si trascuri la resistenza dell'aria).



Soluzione

Si tratta di un moto in due dimensioni, per cui definiamo un sistema di riferimento Oxy, con origine O nel punto di sgancio e asse y diretto verso il basso. Il problema si risolve considerando che, nel tempo che l'oggetto impiega a cadere al suolo (cioè a percorrere l'altezza d), deve essere coperta la distanza tra il punto di sgancio e la coordinata x del punto P. Ora, il moto lungo y è un moto uniformemente accelerato (con accelerazione di gravità g), mentre il moto lungo x è uniforme con velocità v. Da queste considerazioni, si ricava

$$x_P = vt;\; d = \frac{1}{2} g t^2 \tag{10}$$

da cui $t = 14.2$ s e $x_P = 2367$ m (si ricordi che 1 km/h = (1000/3600) m/s). L'angolo θ rispetto all'orizzontale si ricava da

$$tg\,(\theta) = \frac{d}{x_P} \rightarrow \theta = 22.9^\circ \tag{11}$$

Annotazione Piccola annotazione riguardante la descrizione del moto in base al sistema di riferimento. Nel sistema di riferimento solidale con l'aereo, l'aereo rimane immobile, l'oggetto si muove esclusivamente lungo l'asse y ed è il punto P a muoversi con velocità $-v$ verso le x negative. Nel sistema di riferimento solidale con il punto P, l'aereo si muove con velocità v verso le x positive, il punto P rimane immobile e l'oggetto descrive un moto bidimensionale dato dalla composizione di un moto uniformemente accelerato lungo y e un moto uniforme (con velocità v) lungo x.

6. Traiettoria circolare

Un punto materiale si muove lungo una traiettoria circolare di raggio $R = 1\,\mathrm{m}$ con velocità scalare $v = A + Bt^2$, con $A = 4\,\mathrm{m/s}$ e $B = 1\,\mathrm{m/s^3}$. Calcolare:

- la lunghezza dell'arco di circonferenza percorso tra $t_1 = 0\,\mathrm{s}$ e $t_2 = 2\,\mathrm{s}$;
- il modulo dell'accelerazione del punto materiale negli istanti t_1 e t_2.

Soluzione

La lunghezza dell'arco di circonferenza percorso si ottiene integrando la velocità tra gli istanti dati

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \left(A + Bt'^2\right) dt' = \left[At + B\frac{t^3}{3}\right]_{t_1}^{t_2} = 10.7 m/s \tag{12}$$

L'accelerazione è data dalla composizione delle due componenti tangenziale e centripeta

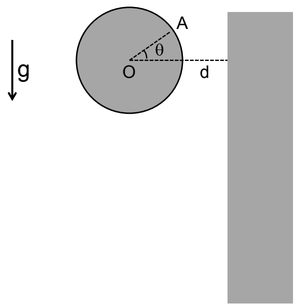
$$\vec{a} = \vec{a_T} + \vec{a_C} = \frac{dv}{dt}\hat{u_T} + \frac{v^2}{R}\hat{u_C} \tag{13}$$

dove $\hat{u_T}$ e $\hat{u_C}$ sono rispettivamente i versori relativi alle direzioni tangenziale e centripeta. Il modulo dell'accelerazione nei due istanti è pertanto

$$a(t) = \sqrt{(2Bt)^2 + \frac{\left(A + Bt^2\right)^2}{R}} \rightarrow a(t_1) = 16 m/s^2;\ a(t_2) = 64.1 m/s^2 \tag{14}$$

7. Moto circolare e moto dei gravi

Una ruota di raggio $R = 50\,\mathrm{cm}$ gira con moto uniforme in verso orario intorno ad un asse orizzontale passante per il suo centro O; la velocità angolare vale $\omega = 2\pi/T = 4\,\mathrm{s}^{-1}$. Nell'istante in cui il raggio OA forma l'angolo $\theta = \pi/6$ con l'asse x, si stacca da A un punto materiale che dopo un certo tempo colpisce una parete distante $d = 1\,\mathrm{m}$ da O. Calcolare il tempo di volo del punto e la sua velocità nell'istante dell'urto.



Soluzione

Al momento del distacco, il punto si trova ad una distanza $d' = d - R\,cos\theta$ dalla parete ed è dotato di una velocità di direzione tangenziale alla circonferenza e modulo $v_i = \omega R = 2$ m/s. Individuiamo un sistema di riferimento Oxy con origine O nel centro della ruota e asse y diretto verso il basso. Le componenti x e y della velocità sono date da $v_x = vsin\theta = 1$ m/s e $v_y = vcos\theta = 1.73$ m/s. Il moto del punto è dato dalla composizione di un moto uniforme con velocità v_x lungo l'asse x e un moto uniformemente accelerato con accelerazione di gravità g lungo l'asse y. Il tempo di volo corrisponde al tempo di impatto con la parete, cioè

$$t_{volo} = \frac{d'}{v_x} = \frac{d - R\,cos\theta}{v_x} = 0.57s \tag{15}$$

La velocità finale è

$$v_f = \sqrt{v_x^2 + v_y^2(t_{volo})} = \sqrt{v_x^2 + (v_{iy} + gt_{volo})^2} = 7.39m/s \tag{16}$$

8. Sistemi di riferimento

Un uomo lungo la riva di un fiume vede passare davanti a sé a distanza $d = 30\,\mathrm{m}$ dalla sponda un prezioso oggetto e decide di recuperarlo. L'oggetto è portato dalla corrente del fiume, che scorre a velocità $v_F = 0.5\,\mathrm{m/s}$ ed il nuotatore si tuffa nel momento in cui l'oggetto passa proprio davanti a lui. Sapendo che l'uomo nuota a velocità $v_U = 1.0\,\mathrm{m/s}$, determinare:

- il tempo impiegato per raggiungere l'oggetto;
- le coordinate dell'uomo quando raggiunge l'oggetto nel sistema di riferimento con origine nella posizione iniziale dell'uomo e assi perpendicolari, di cui uno parallelo alla sponda del fiume;
- direzione e verso, nello stesso sistema di riferimento di cui sopra, in cui deve nuotare l'uomo per tornare nella sua posizione iniziale;
- il tempo impiegato a tornare indietro e lo spazio percorso.

Soluzione

Definiamo due sistemi di riferimento: il primo Oxy è fermo rispetto alla riva, ha origine nella posizione dell'uomo nel momento in cui si tuffa, asse x diretto coincidente con la riva del fiume e asse y diretto verso l'oggeto preziono; il secondo $O'x'y'$ coincide con Oxy nel momento in cui l'uomo si tuffa ma trasla rispetto ad esso con velocitá costante pari a v_F e parallela all'asse x, nello stesso verso in cui scorre il fiume.

- Nel sistema di riferimento $O'x'y'$ l'oggetto è fermo ad una distanza d dall'origine e l'uomo nuota lungo l'asse y' con velocitá costante pari a v_U, quindi il tempo impiegato per raggiungere l'oggetto è dato da:

$$t_0 = \frac{d}{v_U} = 30\,s \tag{17}$$

- Definiamo t_0 l'istante in cui l'uomo raggiunge l'oggetto. In $O'x'y'$ le coordinate dell'uomo sono $x'(t_0) = 0$ e $y'(t_0) = d$, per trovare le coordinate nel sistema Oxy bisogna invertire le trasformazioni di Galileo:

$$\begin{cases} x(t) = x'(t) + OO'_x(t) \\ y(t) = y'(t) + OO'_y(t) \end{cases} \tag{18}$$

In t_0 si ha $OO'_y(t_0) = 0$ e $OO'_x(t_0) = v_F t = 15\,m$, quindi $x(t_0) = 15\,m$ e $y(t_0) = 30\,m$.

- Definiamo θ l'angolo tra la direzione in cui deve nuotare l'uomo e l'asse y'. Allora in $O'x'y'$ l'uomo nuota con velocitá $v'_x = -v_U \sin\theta$ lungo l'asse x' e $v'_y = -v_u \cos\theta$ lungo l'asse y'. La sua posizione iniziale è data da $x'(t_0) = 0$, $y'(t_0) = d = 30\,m$ ed il moto è desctitto da

$$\begin{cases} x'(t) = x'(t_0) + v'_x t = -v_U (t - t_0) \sin\theta \\ y'(t) = y'(t_0) + v'_y t = -v_U (t - t_0) \cos\theta \end{cases} \tag{19}$$

Dalla seconda equazione possiamo ricavare un'espressione per $\Delta t = t - t_0$ in funzione di θ, sapendo che quando l'uomo torna alla posizione iniziale $y' = 0$:

$$\Delta t = \frac{y(t_0)}{v_U \cos\theta} \tag{20}$$

Sostituendo questa espressione nella prima equazione si trova:

$$x'(t) = -y'_0 \tan\theta \tag{21}$$

Passiamo ora al sistema Oxy usando la prima delle equazioni (18), dove $OO'_x(t) = OO'_x(t_0) + v_f(t - t_0)$:

$$x(t) = -y'_0 \tan\theta + OO'_x(t_0) + y(t_0)\frac{v_f}{v_U}\frac{1}{\cos\theta} \tag{22}$$

Sapendo che quando l'uomo torna al punto di partenza $x = 0$ posso risolvere l'equazione trovando $\theta = \arccos\frac{3}{5}$ che definisce la direzione in cui l'uomo deve nuotare.

- Per trovare il tempo impiegato a tornare indietro basta usare la (20): $\Delta t = 50\,s$.
  In Oxy l'uomo ha nuotato dalla posizione $x(t_0) = 15\,m$, $y(t_0) = 30\,m$ all'origine del sistema di riferimento, quindi lo spazio percorso è dato da:

$$s = \sqrt{(x(t_0))^2 + (y(t_0))^2} = 33.5\,m \tag{23}$$