Esonero 13 Novembre 2015

Roberto Bonciani, Paolo Dore

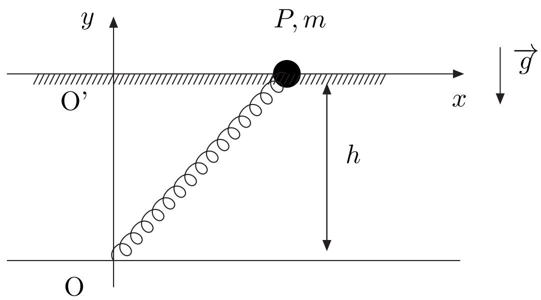
Corso di Fisica Generale 1

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

Anno Accademico 2015-2016

ESONERO 1- FISICA 1 PER MATERMATICA - R. BONCIANI, P. DORE - 13/11/2015

Esercizio 1: (*12 punti*)
Un punto materiale di massa m è vincolato a muoversi su una guida orizzontale con attrito. Il coefficiente di attrito statico è μ_s e quello di attrito dinamico è μ_d. Il punto materiale è collegato al punto O (vedi figura) mediante una molla ideale di costante elastica k e lunghezza di riposo nulla.

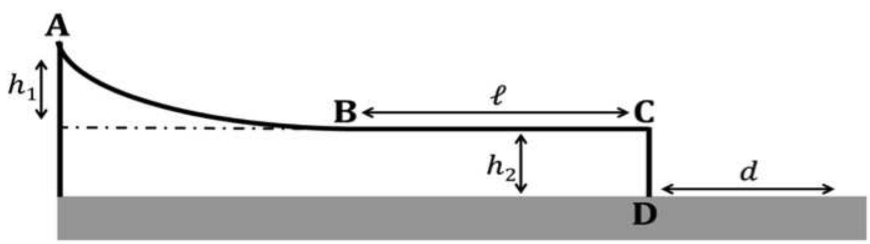


1. Determinare la massima distanza d_{max} dal punto O' alla quale il punto materiale può trovarsi in quiete.

2. Se inizialmente il punto materiale di trova a $d = d_0$ da O', con $v = 0$, calcolare dopo quanto tempo e in quale punto la pallina ha nuovamente $v = 0$.

Valori numerici: $\mu_s = 0.6$, $\mu_d = 0.4$, $k = 60$ N/m, $h = 20$ cm, $m = 500$ g, $d_0 = 30$ cm.

Esercizio 2: (*12 punti*)
Uno sciatore effettua un salto utilizzando un trampolino, rappresentato in figura, composto da una parte in discesa AB ed una orizzontale BC. L'inizio del trampolino (punto A) si trova ad una quota h_1 rispetto alla parte orizzontale BC di lunghezza ℓ; la fine del trampolino (punto C) si trova ad un'altezza h_2 dal suolo.



1. Calcolare la quota h_1 sapendo che lo sciatore atterra alla distanza d dalla base D del trampolino.

2. Calcolare il valore della distanza d' a cui lo sciatore atterrerebbe utilizzando lo stesso trampolino se il tratto BC fosse scabro con coefficiente di attrito dinamico μ_d.

Valori numerici: $h_2 = 5$ m, $d = 10$ m, $\ell = 19$ m, $\mu_d = 0.1$.

Esercizio 3: (*6 punti*)
Su una guida liscia composta da una sezione orizzontale ed una inclinata di un angolo $\theta = 25°$ (vedi figura) viene posto, inizialmente in quiete sulla porzione orizzontale, un punto materiale di massa $m = 2$ kg. Tra il tempo $t_0 = 0$ ed il tempo $t_1 = 5$ s tale massa è sottoposta ad una forza orizzontale diretta come in figura e di modulo $f = A + Bt$ con $A = 2$ N e $B = 4$ N/s. Dopo che l'azione della forza è cessata, il punto materiale inizia a salire lungo il piano inclinato (in presenza della forza di gravità). Ricavare la distanza percorsa dalla massa sulla sezione inclinata della guida prima di fermarsi.

Soluzione Esercizio 1

1. Prendiamo un sistema di riferimento con assi cartesiani come in figura. La forza elastica alla quale il punto materiale è sottoposto ha la seguente forma:

$$\mathbf{F} = -kx\mathbf{i} - kh\mathbf{j}\,. \tag{1}$$

Scrivendo la seconda legge della dinamica lungo le y, si ottiene la reazione normale del vincolo:

$$N = mg + kh\,. \tag{2}$$

La componente x, invece, ci dà (imponendo l'equilibrio) la forza d'attrito radente in funzione della distanza x del punto da O':

$$F_t = kx\,. \tag{3}$$

Siccome $F_t \leq \mu_s N$, si avrà:

$$kx_{max} = \mu_s(mg + kh)\,, \tag{4}$$

da cui:

$$x_{max} = \frac{\mu_s(mg + kh)}{k} = 16.9 \text{ cm}\,. \tag{5}$$

2. Si può risolvere con l'eq del moto o con l'energia.

Equazione del moto. Nel caso in questione, l'equazione del moto lungo le x è data da:

$$m\ddot{x} = \mu_d(mg + kh) - kx\,, \tag{6}$$

da cui

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x - \mu_d\left(g + \frac{k}{m}h\right) = 0\,. \tag{7}$$

Poniamo

$$y = x - \mu_d\left(h + \frac{m}{k}g\right) = x - x_*\,, \tag{8}$$

dove

$$x_* = \mu_d\left(h + \frac{m}{k}g\right) = 11.3 \text{ cm}\,. \tag{9}$$

Allora si ha:

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}y = 0\,, \tag{10}$$

equazione del moto armonico, che ha per soluzione generale

$$y(t) = x(t) - x_* = A\cos(\omega t + \phi)\,, \tag{11}$$

dove ϕ e A devono essere trovate imponento le condizioni iniziali e

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10.95 \text{ s}^{-1} \tag{12}$$

è la pulsazione del moto.

Se lasciamo il punto materiale da d_0 con $v_0 = 0$, si ha:

$$d_0 = x_* + A\cos\phi\,, \tag{13}$$
$$0 = -\omega A\sin\phi\,, \tag{14}$$

da cui si ricava:

$$\phi = 0\,, \qquad A = d_0 - x_*\,. \tag{15}$$

Infine:

$$x(t) = x_* + (d_0 - x_*)\cos(\omega t)\,. \tag{16}$$

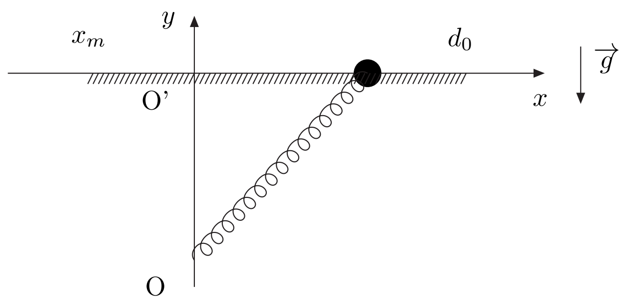
La velocità del punto sarà di nuovo nulla dopo mezzo periodo, ovvero per

$$t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} = 0.29 \text{ s}\,. \tag{17}$$

Sostituendo nella (16)

$$x(\pi/\omega) = 2x_* - d_0 = -7.4 \text{ cm}\,. \tag{18}$$

Energia.



.

In questo caso, l'energia cinetica iniziale è nulla così come quella finale. Per cui, il teorema delle forze vive ci dice che:

$$L_{d_0,x} = 0\,. \tag{19}$$

D'altra parte,

$$L_{d_0,x} = \int_{d_0}^{x_m} \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{x} + V(d_0) - V(x_m)\,, \tag{20}$$

dove:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_t &= \mu_d(mg + kh)\,\mathbf{i}\,, && (21)\\ d\mathbf{x} &= -dx\,\mathbf{i} \quad \text{con integrale in } dx \text{ da } x_m \text{ a } d_0\,, && (22)\\ V(d_0) - V(x_m) &= \frac{1}{2}kd_0^2 - \frac{1}{2}kx_m^2\,. && (23) \end{aligned}$$

In totale:

$$\begin{aligned} 0 &= -\mu_d(mg + kh)\int_{x_m}^{d_0} dx + \frac{1}{2}kd_0^2 - \frac{1}{2}kx_m^2\,, && (24)\\ &= -\mu_d(mg + kh)(d_0 - x_m) + \frac{1}{2}kd_0^2 - \frac{1}{2}kx_m^2\,. && (25) \end{aligned}$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado, si ha:

$$x_m = x_* \pm \sqrt{x_*^2 - (2x_*d_0 - d_0^2)} = x_* \pm |x_* - d_0|\,. \tag{26}$$

dove:

$$x_* = \mu_d\left(h + \frac{mg}{k}\right) = 11.3 \text{ cm}\,. \tag{27}$$

Le due soluzioni sono

$$x_m = 2x_* - d_0 = -7.4 \text{ cm}\,, \tag{28}$$

e $x_m = d_0 = 30$ cm che quindi è da scartare, perché non ha significato fisico.

Soluzione Esercizio 2

1. Se il vincolo è liscio, lo sciatore è soggetto alla sola forza di gravità, che è conservativa.

   Mettiamoci in un sistema di riferimento cartesiano con asse y orientata verso l'alto e asse x orientata verso destra.

   Possiamo utilizzare la conservazione dell'energia per trovare la velocità in C, che chiameremo $\mathbf{v}_0$, in funzione di h_1. Poniamo lo zero dell'energia potenziale gravitazionale alla quota di C. Allora:

$$mgh_1 = \frac{1}{2}mv_0^2\,, \tag{29}$$

   da cui:

$$v_0 = \sqrt{2gh_1}\,. \tag{30}$$

   Abbiamo preso la soluzione positiva perché nel nostro sistema di riferimento v_0 sarà orientata verso destra:

$$\mathbf{v}_0 = \sqrt{2gh_1}\,\hat{\imath}\,. \tag{31}$$

   Il moto da C a terra sarà caratterizzato dalle seguenti equazioni, lungo gli assi cartesiani:

$$x(t) = v_{0x}t + x(0)\,, \tag{32}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y(0)\,. \tag{33}$$

   Imponendo le condizioni iniziali

$$x(0) = 0\,, \quad y(0) = h_2\,, \quad v_{0x} = v_0\,, \quad v_{0y} = 0\,, \tag{34}$$

   si ottiene

$$x(t) = v_0 t\,, \tag{35}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h_2\,, \tag{36}$$

   forma parametrica della seguente traiettoria parabolica:

$$t = \frac{x}{v_0}\,, \tag{37}$$

$$y = -\frac{g}{2v_0^2}x^2 + h_2\,. \tag{38}$$

   Imponendo $y = 0$ e prendendo la soluzione positiva si trova

$$x = \sqrt{\frac{2h_2v_0^2}{g}} = 2\sqrt{h_2h_1}\,. \tag{39}$$

   Imponendo $x = d$, infine si ha:

$$h_1 = \frac{d^2}{4h_2} = 5\ \text{m}\,. \tag{40}$$

2. Se il tratto BC è scabro, per trovare la velocità v_0 in C possiamo usare il teorema delle forze vive:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh_1 + \int_B^C \mathbf{F}_t \cdot \mathbf{dx} = mgh_1 - \mu_d N\,L\,. \tag{41}$$

   La reazione normale del vincolo è, per il secondo principio della dinamica

$$N = mg\,, \tag{42}$$

   e quindi

$$v_0^2 = 2(h_1 - \mu_d L)g\,. \tag{43}$$

   Sostituendo questo valore di v_0^2 in Eq. (39), si ottiene

$$d' = 2\sqrt{h_2(h_1 - \mu_d L)} = 7.87\ \text{m}\,. \tag{44}$$

Soluzione Esercizio 3

Troviamo l'impulso comunicato al punto materiale dalla forza $\mathbf{f} = f\hat{\imath}$ nei 5 s in cui agisce. Si ha

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f dt = A(t_1 - t_0) + \frac{B}{2}(t_1^2 - t_0^2) = 60 \text{ Ns}\,. \tag{45}$$

Per il teorema dell'impulso si ha

$$I = mv(t_1) - mv(t_0) = mv(t_1)\,. \tag{46}$$

Quindi, come risultato dell'azione della forza f, il punto materiale acquista una velocità

$$v_1 = v(t_1) = \frac{I}{m} = 30 \text{ m/s}\,. \tag{47}$$

Nel tratto successivo del moto, il punto è soggetto alla sola forza di gravità. Per trovare la distanza percorsa dalla massa sulla sezione inclinata, utilizziamo la conservazione dell'energia meccanica. All'inizio questa è pari all'energia cinetica del punto; alla fine, quando il punto si ferma, sarà pari alla sua energia potenziale. Abbiamo, quindi:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgh = mg\,d\sin\theta\,, \tag{48}$$

da cui

$$d = \frac{v_1^2}{2g\sin\theta} = 108.54 \text{ m}\,. \tag{49}$$