Appunti di
MECCANICA CLASSICA

Roberto Bonciani*

Dipartimento di Fisica, Università di Roma "La Sapienza"
e INFN Sezione di Roma,
Piazzale Aldo Moro 2,
00185 Roma

Corso di Fisica Generale 1 (Matematica)

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

Anni Accademici 2016-2017, 2017-2018, 2018-2019

*Email: roberto.bonciani@roma1.infn.it

Indice

1 INTRODUZIONE **5**
1.1 Metodo Scientifico . . . 5
1.1.1 Il Modello . . . 5
1.1.2 Grandezze fisiche e loro misura . . . 6
1.2 Richiami di calcolo vettoriale . . . 7
1.3 Rappresentazione Cartesiana . . . 9

2 APPUNTI DI CINEMATICA **11**
2.1 Sistema di riferimento . . . 11
2.2 Punto Materiale . . . 12
2.3 Parametrizzazione naturale . . . 13
2.4 Moto rettilineo di un punto . . . 13
2.4.1 Moto rettilineo uniforme . . . 15
2.4.2 Moto uniformemente accelerato . . . 16
2.4.3 Esempio: caduta dei gravi . . . 17
2.5 Moto piano generico di un punto . . . 19
2.5.1 Derivata del vettore posizione . . . 20
2.6 Parametrizzazione naturale . . . 20
2.7 Velocità e accelerazione . . . 21
2.8 Moto piano in coordinate polari . . . 23
2.9 Moto circolare . . . 24
2.10 Moto armonico . . . 25
2.11 Esempio di moto piano: balistica . . . 26
2.12 Cinematica relativa . . . 30

3 APPUNTI DI STATICA DEL PUNTO **34**
3.1 Forze . . . 34
3.1.1 Proprietà della forza . . . 34
3.1.2 Misura statica della forza . . . 35
3.2 Macchine . . . 37
3.3 Equilibrio del punto materiale . . . 37
3.4 Vincoli . . . 38
3.4.1 Vincoli lisci . . . 38
3.4.2 Vincoli con attrito . . . 39
3.4.3 Esempio . . . 39

4 APPUNTI DI DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE **41**
4.1 Primo Principio della Dinamica . . . 41
4.2 Secondo Principio della Dinamica . . . 41
4.3 Terzo Principio della Dinamica . . . 42
4.4 Relatività galileiana e SdR inerziali . . . 42
4.4.1 Massa inerziale, massa gravitazionale e Principio di Equivalenza . . . 44
4.4.2 Misura dinamica delle forze . . . 46
4.4.3 Problema fondamentale della dinamica . . . 46
4.4.4 Forze interne . . . 47
4.5 Quantità importanti . . . 47
4.5.1 Quantità di moto . . . 47
4.5.2 Momento angolare . . . 48
4.5.3 Impulso . . . 48
4.6 Dinamica relativa . . . 49
4.7 Esempi . . . 49
4.7.1 Piano inclinato liscio . . . 49
4.7.2 Piano inclinato scabro . . . 50
4.7.3 Piano orizzontale scabro . . . 51
4.7.4 Macchina di Flechter . . . 52
4.7.5 Macchina di Atwood . . . 53
4.8 Attrito viscoso . . . 54
4.8.1 Caduta di un grave in aria . . . 55
4.9 Molla ideale e legge di Hooke . . . 57
4.9.1 Molla con gravità . . . 59
4.9.2 Molla con attrito radente . . . 60
4.9.3 Molla con attrito viscoso . . . 62
4.10 Moto Armonico con Attrito Viscoso e Forzante Sinusoidale: Risonanza . . . 63
4.10.1 Pendolo . . . 66

5 APPUNTI SU LAVORO ED ENERGIA **68**
5.1 Lavoro ed energia . . . 68
5.2 Teorema delle forze vive . . . 69
5.3 Forze conservative . . . 70
5.4 Forze posizionali . . . 73
5.5 Conservazione dell'energia meccanica . . . 75
5.5.1 Soluzione generale . . . 76
5.6 Il pendolo . . . 76
5.7 Oscillatore armonico . . . 78
5.7.1 Energia nell'oscillatore armonico . . . 79
5.8 Teorema delle forze vive forze conservative e forze dissipative . . . 80
5.9 Energia potenziale ed equilibrio . . . 80

6 APPUNTI SULLA GRAVITAZIONE **83**
6.1 Leggi di Keplero . . . 83
6.1.1 Velocità areolare . . . 83
6.1.2 Ellisse in coordinate cartesiane . . . 84
6.1.3 Ellisse in coordinate polari . . . 85

6.2 Da Keplero a Newton . . . 86
6.2.1 Le orbite sono piane 86
6.2.2 La velocità areolare è costante 87
6.2.3 Andamento $1/r^2$ . . . 87
6.2.4 Dalla Terza Legge 88
6.3 Da Newton a Keplero . . . 89

7 APPUNTI SUI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI 91
7.1 Prima equazione cardinale e centro di massa . . . 91
7.2 Conservazione della quantità di moto . . . 93
7.3 Seconda equazione cardinale . . . 93
7.4 Forza peso e baricentro . . . 95
7.5 Teorema di König per il momento angolare . . . 96
7.6 Equazioni Cardinali e sistemi isolati . . . 98
7.7 Teorema delle forze vive . . . 99
7.8 Teorema di König per l'energia cinetica . . . 99
7.9 Forze conservative . . . 100
7.10 Il problema dei due corpi nel SdR centrato sul Sole . . . 101
7.11 Il problema dei due corpi nel SdR del centro di massa . . . 101

8 APPUNTI SUL CORPO RIGIDO 102
8.1 Cinematica del corpo rigido . . . 102
8.2 Considerazioni su ω e v_o . . . 103
8.3 Moti rigidi piani . . . 104
8.4 Rotolamento puro . . . 104

Questi appunti non vogliono essere una trattazione esaustiva della meccanica e della termodinamica, ma soltanto una schematica presentazione di ciò che è stato trattato a lezione.

Capitolo 1

INTRODUZIONE

1.1 Metodo Scientifico

Il Metodo scientifico fu introdotto da Galileo Galilei all'inizio del 1600 in una rivoluzione totale dell'approccio allo studio del mondo che ci circonda. Si può sintetizzare dicendo che si basa sull'interrogare la natura attraverso esperimenti mirati che ne rivelino i comportamenti fondamentali.

Si articola in quattro punti:

1. Esperimento. L'Esperimento è il modo con cui lo scienziato interroga la Natura. Deve essere "mirato" a mettere in luce il fenomeno studiato. Deve essere riproducibile da altri scienziati, in altri luoghi e in altri momenti.

2. Modello. Sulla base dell'esperimento lo scienziato costruisce il suo Modello. Il Modello NON è una semplice descrizione di ciò che ha vivelato l'Esperimento. È una schematizzazione "oggettiva" in linguaggio matematico che porta a predizioni.

3. Predizione. La Predizione è il punto nevralgico del Modello. Il Modello deve essere capace di prevedere il comportamento del sistema fisico che descrive, in situazioni diverse da quelle che hanno portato alla sua costruzione.

4. Esperimento. Una volta fatte delle predizioni teoriche sulla base del modello, tali predizioni devono ripassare al vaglio dell'Esperimento, il quale potrà confermare il modello per altri processi (corroborandone la struttura) oppure falsificarlo. Se l'Esperimento mette in evidenza un processo per il quale il Modello non dà una descrizione consistente, il Modello deve essere raffinato e cambiato per includere nella descrizione il nuovo fenomeno. Ciò permette al Modello di raggiungere un livello di generalità più elevato.

Attraverso questi due strumenti, esperimento e modellizzazione, si possono comprendere le leggi fondamentali che governano l'Universo.

1.1.1 Il Modello

Il Modello (o la Teoria) si esplica in "Principi", affermazioni semplici di caratere generale che possano essere formalizzate con delle "Leggi Fisiche", cioè delle relazioni quanitative fra "grandezze fisiche". Il Modello è una schematizzazione della realtà, che descrive in forma semplificata.

1.1.2 Grandezze fisiche e loro misura

Le "grandezze fisiche" sono le grandezze che servono per la descrizione oggettiva del fenomeno sotto studio. Per esempio, nello studio del movimento di un corpo la distanza del corpo stesso dall'osservatore oppure il tempo che il corpo impiega a raggiungere un punto sulla sua traiettoria, sono entrambe grandezze fisiche.

Misura

Nella descrizione quantitativa di un fenomeno si pone il problema di come *associare un numero ad una grandezza fisica*. Ciò viene definito come procedimento di "misura", che deve essere il più possibile univoco (non ambiguo) e deve essere riproducibile.

Praticamente, il procedimento di misura si quantifica con il confronto della grandezza fisica con un "campione", che chiameremo "unità di misura". Al campione verrà fatto corrispondere il numero 1 in quella unità di misura.

Il rapporto fra grandezza e campione, ovvero il numero di volte in cui il campione "entra" nella grandezza è la misura di quest'ultima. Questo concetto si rifà direttamente alla misura di una lunghezza, nella quale per esempio contiamo quante volte entra il campione "metro" nella distanza che devo misurare. Per il tempo, le cose sono un po' più complicate. La misura di un intervallo di tempo si deve fare per confronto con due eventi consecutivi. È chiara la necessità di avere eventi che facciano parte di un processo *periodico*, come per esempio un pendolo: Se diamo una certa durata alla oscillazione completa del pendolo, potremo misurare un intervallo di tempo fra due eventi, contando il numero di oscillazioni pendolari che li separa.

Si parla di misurazione diretta o indiretta. Nel primo caso la grandezza viene misurata con un confronto diretto col campione (esempio: lunghezza). Il secondo caso invece è rilevante quando la grandezza in questione è una funzione di grandezze "più semplici", che diremo fondamentali, e quindi la misura di tale grandezza deriva dalla funzione delle misure delle grandezze che la definiscono. Per esempio, la velocità, che è data dal rapporto di una lunghezza e di un tempo, sarà misurata tramite tale rapporto una volta che vengano indipendentemente misurate le grandezze lunghezza e tempo pertinenti al processo in esame.

Grandezze Fondamentali

Le grandezze fondamentali sono le grandezze in termini delle quali possono essere espresse tutte le altre. In meccanica storicamente si usano come grandezze fondamentali *lunghezza*, *tempo* e *massa* e si indicano le rispettive dimensioni con i simboli $[l]$, $[t]$ e $[m]$.

Le altre grandezze si esprimono in funzione delle fondamentali. Per esempio la velocità sarà espressa dal rapporto di una lunghezza e di un intervallo di tempo e quindi avrà dimensione $[v] = [l]\,[t]^{-1}$.

Grandezze prive di dimensioni vengono dette *adimensionali*. Per esempio il rapporto di due grandezze omogenee, ovvero con la stessa dimensione, è adimensionale. Un angolo, definito in radianti come rapporto di due lunghezze, è una quantità adimensionale: $[\alpha] = [l]\,[l]^{-1} = 0$.

La scelta delle grandezze fondamentali è legata alla riproducibilità e alla precisione di misura delle grandezze stesse. Storicamente si usano lunghezza, tempo e massa come grandezze fondamentali perché è immediato pensare a come misurare una lunghezza col metro campione, il tempo come confronto con un fenomeno periodico (esempio il pendolo) e la massa con la bilancia a due bracci. Queste definizioni però sono cambiate nel tempo e la necessità di avere

un campione sempre più preciso e riproducibile ha fatto evolvere il concetto di *metro*, *secondo* e *chilogrammo massa* nel corso dei secoli.

Unità di misura

Il sistema di unità di misura è l'insieme dei campioni scelti per le grandezze fisiche fondamentali. Il Sistema Internazionale, per esempio, utilizza come unità di misura della lunghezza il *metro*, che ha cambiato nei secoli diverse definizioni operative, come unità di misuta del tempo il *secondo* e come unità di massa il *kg massa*. Il metro, inizialmente definito come la lunghezza di un pendolo il cui semiperiodo sia pari ad un secondo, venne poi legato alla fine del '700 alla misura del meridiano terrestre (1m=1/10000000 del semi-meridiano terrestre, dal Polo Nord all'Equatore) e nel 1889 alla distanza fra due tacche incise su una barra di platino-iridio conservata in condizioni standard al Bureau International des Poids et Mesures di Sèvres, vicino a Parigi. La precisione di tale definizione è limitata, per esempio, dallo spessore delle tacche. Con l'avvento dei laser, negli anni '60 si definisce il metro come 1650763.73 volte la lunghezza d'onda nel vuoto della radiazione conseguente alla transizione $2p^{10} \rightarrow 5d^5$ del kripton-86. Successivamente, il metro diviene effettivamente una grandezza derivata, essendo definito dal 1983 come la distanza che la luce percorre in 1/299792458 di secondo. Tale definizione permette una precisione dell'ordine di $\sim 10^{-10}$. Anche per il secondo si passa dalla sua definizione come 1/86400 del giorno solare medio, poi specificato come "giorno solare medio dell'anno 1900", all'introduzione dell'orologio atomico nel 1967, con cui il secondo viene definito come 9192631770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione fra due livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo di cesio-133. Questa definizione permette una precisione di $\sim 10^{-12}$. Il chilogrammo è definito come la massa di un campione in lega di platino-iridio, conservato al Bureau International des Poids et Mesures di Sèvres ed ha una precisione intrinseca di $\sim 10^{-8}$.

Per facilitare le misure col campione, se ne definiscono multipli e sottomultipli.

La branca della fisica che studia la corretta definizione delle grandezze indipendenti e le corrispondenti unità di misura è detta *metrologia*.

1.2 Richiami di calcolo vettoriale

Nello studio della meccanica abbiamo bisogno di due pilastri della matematica, ovvero del calcolo differenziale e del calcolo vettoriale. In questo paragrafo elenchiamo semplicemente una serie di definizioni e proprietà che ci saranno utili in seguito.

In seguito, incontreremo grandezze *scalari* e *vettoriali*.

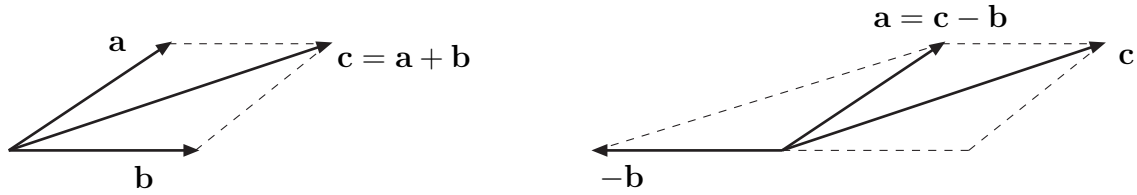
- *scalari*: sono grandezze caratterizzate univocamente da un numero (nel nostro caso un numero reale), come per esempio il tempo, la massa, la temperatura, la pressione ...

- *vettori*: sono grandezze caratterizzate da un'intensità (il modulo del vettore), da una direzione e da un verso. Per esempio la velocità: per la caratterizzazione del moto non basta dire che procedo a 50 km/h ma occorre precisare anche la mia direzione (Roma-Milano) e il mio verso (da Roma a Milano oppure viceversa da Milano a Roma).

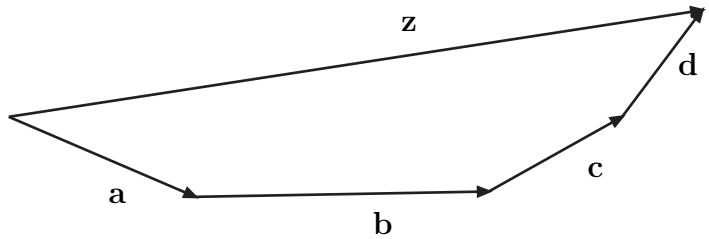
Per indicare un vettore utilizzeremo indifferentemente diversi tipi di notazione: $\mathbf{v}$, $\overrightarrow{v}$, $\underline{v}$, $(P - O)$ ... Sia chiaro che senza alcun segno distintivo v è uno scalare e non un vettore.

Definizione 1.2.1 *Dati due vettori* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{b}$*, si dice che* $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ *se* $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\|$ *e se hanno la stessa direzione e lo stesso verso. Quindi* $\mathbf{a} = -\mathbf{b}$ *se* $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\|$ *e se hanno stessa direzione e verso opposto.*

Definizione 1.2.2 *Si definisce come somma fra due vettori* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{b}$ *il vettore* $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ *che si trova con la regola del parallelogramma. Analogamente* $\mathbf{a} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$.



Iterando la regola si ha che $\mathbf{z} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}$ è rappresentato in figura:



- *Proprietà commutativa*: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.
- *Proprietà associativa*: $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$.

Definizione 1.2.3 *Se* $\mathbf{v}$ *è un vettore e* $\lambda \in \mathbb{R}$*, allora* $\mathbf{w} = \lambda\mathbf{v}$ *è un vettore che ha per modulo* $\|\mathbf{w}\| = |\lambda|\,\|\mathbf{v}\|$*, per direzione la direzione di* $\mathbf{v}$ *e per verso il verso di* $\mathbf{v}$ *se* $\lambda > 0$ *o il suo opposto se* $\lambda < 0$.

- $\lambda(\mu\mathbf{v}) = \mu(\lambda\mathbf{v}) = (\lambda\mu)\mathbf{v}$ per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- $(\lambda + \mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v}$.
- $\lambda(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \lambda\mathbf{v} + \lambda\mathbf{w}$
- $\lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$ implica $\lambda = 0$ o $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Definizione 1.2.4 *Si dice versore un vettore di modulo unitario:* $\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$, $\|\hat{\mathbf{v}}\| = 1$.

Definizione 1.2.5 *Si dice prodotto scalare fra i due vettori* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$*, appartenenti ad uno spazio vettoriale sul campo reale, una funzione che associa ai due vettori un numero del campo così definito:*

$$P(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\| \cos\alpha\,, \tag{1.1}$$

dove α *è l'angolo fra i due vettori.*

- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$,
- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$,

- $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} + \mathbf{z}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{z}$,
- $\mathbf{v} \cdot (\lambda \mathbf{w}) = \lambda \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$.

Definizione 1.2.6 *Si dice prodotto vettoriale fra i due vettori* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$*, appartenenti ad uno spazio vettoriale sul campo reale, una funzione che associa ai due vettori un altro vettore dello stesso spazio vettoriale così definito:*

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{z}\,, \tag{1.2}$$

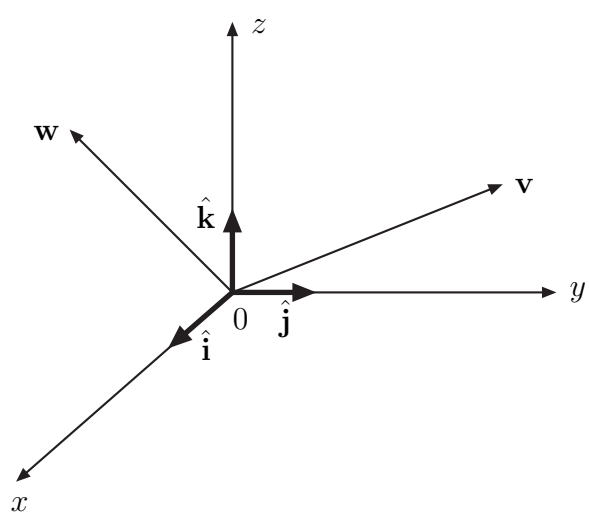
tale che $\|\mathbf{z}\| = \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\| \sin\alpha$*, la direzione è quella perpendicolare al piano individuato dai vettori* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$*, e il verso è quello della regola della mano destra, ovvero il vettore* $\mathbf{z}$ *punta nel verso da cui si veda ruotare* $\mathbf{v}$ *su* $\mathbf{w}$ *in senso antiorario coprendo l'angolo acuto.*

- $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$,
- $\mathbf{v} \wedge (-\mathbf{w}) = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$,
- $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$,
- $\mathbf{v} \wedge (\mathbf{w} + \mathbf{z}) = \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{z}$,
- $\mathbf{v} \wedge (\lambda \mathbf{w}) = \lambda \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$.
- $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ ("bac men cab").

.. nota che $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c}$.

1.3 Rappresentazione Cartesiana

Descriviamo i nostri vettori in un sistema cartesiano e vediamo come si scrivono in questo caso le somme e i prodotti che abbiamo definito in maniera "astratta" nel paragrafo precedente. Definiamo la triade ortonormale $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$, che definisce il verso positivo sugli assi.



$$\|\hat{\mathbf{i}}\| = \|\hat{\mathbf{j}}\| = \|\hat{\mathbf{k}}\| = 1\,.$$

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 0\,,$$

$$\hat{\mathbf{i}} \wedge \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}\,,\ \hat{\mathbf{j}} \wedge \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}}\,,\ \hat{\mathbf{k}} \wedge \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\,.$$

Il vettore $\mathbf{v}$ si scriverà in coordinate cartesiane come segue:

$$\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}} + v_z \hat{\mathbf{k}} = (v_x, v_y, v_z)\,. \tag{1.3}$$

Allora si trova che:

- $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_x + w_x)\hat{\mathbf{i}} + (v_y + w_y)\hat{\mathbf{j}} + (v_z + w_z)\hat{\mathbf{k}} \quad ,$
- $\lambda\mathbf{v} = \lambda v_x\hat{\mathbf{i}} + \lambda v_y\hat{\mathbf{j}} + \lambda v_z\hat{\mathbf{k}} \quad ,$
- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z \quad ,$
- $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = (v_y w_z - v_z w_y)\hat{\mathbf{i}} + (v_z w_x - v_x w_z)\hat{\mathbf{j}} + (v_x w_y - v_y w_x)\hat{\mathbf{k}}.$

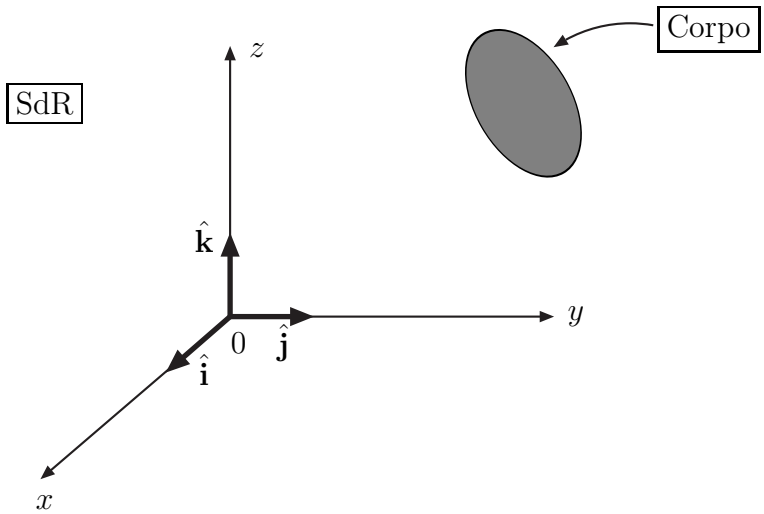
Capitolo 2

APPUNTI DI CINEMATICA

In queto capitolo tratteremo la Cinematica, ovvero lo tudio del movimento di un sistema fisico in un certo sitema di riferimento, indipendentemente dalle cause che generano il moto.

2.1 Sistema di riferimento

Per studio del movimento di un corpo, intendiamo lo studio del cambiamento col tempo della sua posizione rispetto ad un Sistema di Riferimento (SdR), che sarà dato, per esempio, da una terna di assi cartesiani, x,y e z e da un'origine, O.



Dovendo misurare delle distanze e degli intervalli di tempo, saranno necessarie alcune precisazioni sulla struttura dello spazio in cui opereremo e sul tempo stesso.

- Lo spazio in cui intendiamo ambientare il nostro studio è uno *spazio vettoriale Euclideo*, ovvero valgono gli assiomi della geometria Euclidea. Che questo sia vero, almeno nel grado di approssimazione che ci interessa, può essere verificato sperimentalmente (Es: esperimento di Gauss sulla somma degli angoli interni di un triangolo). Inoltre lo spazio è *omogeneo* (cioè non ci sono punti o zone "privilegiate" rispetto ad altre) e *isotropo* (cioè non ci sono direzioni privilegiate rispetto ad altre).

- In meccanica Newtoniana il tempo costituisce un parametro esterno ed assoluto, che segna il susseguirsi degli eventi. Per assoluto, si intende il fatto che in ogni punto del nostro spazio, il tempo scorre nello stesso identico modo. Due orologi che vengano sincronizzati in un punto del nostro SdR, in un centro istante, rimangono sincronizzati sempre e ovunque. Questa in realtà è un'approssimazione che vale finché le velocità in gioco sono piccole rispetto alla velocità della luce e finché i campi gravitazionali considerati sono sufficientemente poco intensi, ma per lo studio della meccanica Newtoniana questa sarà un'assunzione esatta.

2.2 Punto Materiale

Per introdurre i concetti fondamentali della cinematica e della dinamica, utilizzeremo una schematizzazione del nostro sistema fisico in esame e definiremo il *punto materiale*.

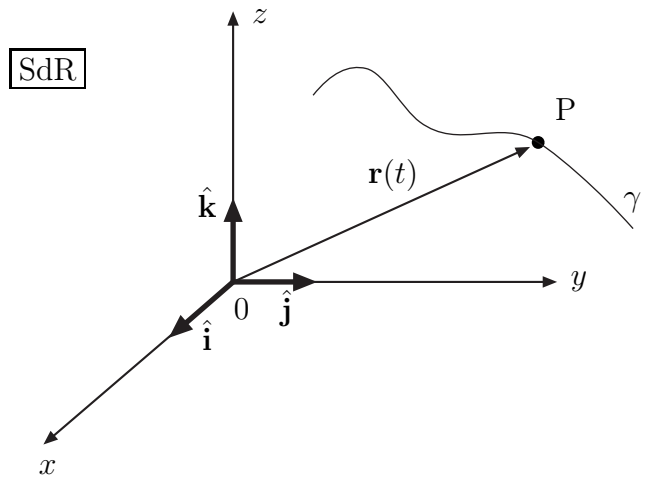
Definizione 2.2.1 *Il punto material è un oggetto privo di dimensioni (punto geometrico) che eventualmente ha massa m.*

Questa è la schematizzazione fisica di un corpo le cui dimensioni siano trascurabili rispetto alle tipiche distanze percorse. Per esempio, un pianeta sulla sua orbita può essere descritto in buona approssimazione come un punto materiale.

Per descrivere il moto del punto materiale nello spazio abbiamo bisogno di tre coordinate. Si dice che il punto nello spazio ha tre *gradi di libertà*. Quindi:

Definizione 2.2.2 *I gradi di libertà di un sistema sono i parametri indipendenti necessari per definirne univocamente la configurazione rispetto al SdR scelto.*

Il punto materiale P nel sistema di riferimento SdR sarà individuato dal suo *raggio vettore* $\mathbf{r}(t)$ (un vettore in $\mathbb{R}^3$, quindi appunto 3 parametri indipendenti):



Il fine della cinematica è quello di trovare l'equazione

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)\,, \tag{2.1}$$

detta *equazione vettoriale del moto*. In componenti, rispetto al SdR ortonormale si ha

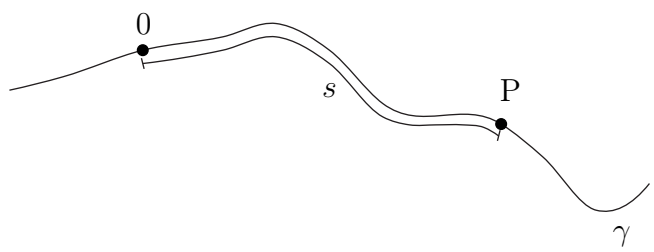
$$\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}}\,. \tag{2.2}$$

Allo scorrere del tempo (parametro t) l'Eq. (2.2) descrive la *traiettoria* γ, ovvero il luogo geometrico dei punti toccati da P nel suo moto.

2.3 Parametrizzazione naturale

Un altro modo utile di descrivere il moto è quello di separarne (per così dire) la parte geometrica damma parte cinematica, introducendo la parametrizzazione naturale.

Supponiamo di conoscere la traiettoria γ percorsa dal punto materiale P nel suo moto. Data γ, sappiamo come definire la lunghezza s della curva a partire da un certo punto su di essa, 0, che funge da origine.



Tale lunghezza cambia nel tempo, dipendendo dal moto di P su γ. Quindi sarà una funzione del tempo. Supponiamo che sia una funzione monotona e derivabile. Allora, possiamo parametrizzare il moto di P su γ in termini di s e l'equazione vettoriale del moto potrà essere scritta come segue:

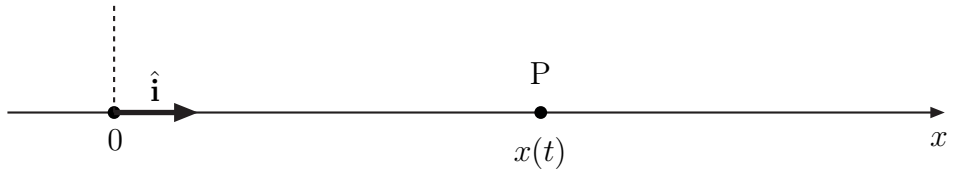
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)\,, \tag{2.3}$$

$$s = s(t)\,. \tag{2.4}$$

In questo modo abbiamo diviso la parte puramente geometrica del moto da quella cinematica. La prima è descritta dall'Eq. (2.3) e riguarda la traiettoria come luogo geometrico, parametrizzata dalla lunghezza della curva s. La seconda, in Eq. (2.4), mi dice come si muove il punto su tale traiettoria ed è detta equazione oraria.

2.4 Moto rettilineo di un punto

Per introdurre le grandezze fisiche fondamentali per la descrizione del moto, consideriamo il caso semplice di un moto unidimensionale rettilineo. In questo caso il SdR è una retta orientata sulla quale prenderemo un'origine, O, e un verso positivo indicato dal versore $\hat{\mathbf{i}}$ (o dalla freccia delle coordinate x positive).



Il moto del punto P è dato dal cambiamento della sua coordinata, x, rispetto al tempo:

$$x = x(t)\,. \tag{2.5}$$

Nota: in tale sistema di riferimento non useremo la notazione vettoriale $\mathbf{x}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}}$, ma utilizzeremo semplicemente la funzione $x(t)$ col suo segno. Ciò è sufficiente per la descrizione completa del moto. Infatti la direzione è fissata a priori, rimane dunque soltanto l'arbitrarietà del verso, che si traduce nel segno di x.

Supponiamo che nella descrizione del moto di P io registri che a $t = t_1$ (nell'istante t_1) il punto P si trovava in $x = x_1$, mentre ad un istante successivo, $t = t_2$, la sua posizione era $x = x_2$. Posso allora asserire che nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_2$ il punto ha percorso almeno la distanza $\Delta x = x_2 - x_1$. Possiamo allora introdurre un concetto importante, quello di *velocità media*, $\bar{v}$:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\,, \tag{2.6}$$

che mi dirà in media qual'è lo spazio percorso dal punto nell'unità di tempo. La $\bar{v}$, in effetti, mi dà informazioni sul moto di P, ma non molto particolareggiate. Infatti, il P avrebbe per esempio potuto muoversi nella prima metà del tragitto con una cerca velocità media elevata per poi rallentare nella seconda metà del tragitto. Oppure avrebbe potuto muoversi con una velocità media più elevata di $\bar{v}$, oltrepassare il punto x_2 per poi tornare indietro e arrivare in x_2 nel tempo Δt. In entrambi questi moti, che sono diversi fra loro, la velocità media è la stessa. Ci possiamo porre allora il problema di trovare una descrizione più particolareggiata del moto del punto P, facendo un campionamento dell'intervallo Δt in tanti piccoli Δt_i. In ognuno potrò definire una velocità media per quel Δt_i e scoprire che il moto è stato più vario di quello descritto in prima analisi. La cosa ideale sarebbe di conoscere la velocità di P, istante per istante. Ma questo si può fare immaginando un procedimento di limite in cui i Δt_i diventano sempre più piccoli. Si introduce, allora, il concetto di *velocità istantanea*, v:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\,, \tag{2.7}$$

dove il limite matematico è da spiegare e puntualizzare in maniera fisica.

Anche la velocità può cambiare col tempo

$$v = v(t) \tag{2.8}$$

per cui conviene, allo stesso modo di come è stato fatto per il moto $x(t)$, introdurre la variazione di v col tempo, che si chiamerà *accelerazione*. Avremo un'accelerazione media data da

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{2.9}$$

e un'accelerazione istantanea, in cui si prende il limite in cui i Δt_i diventano sempre più piccoli:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}\,. \tag{2.10}$$

In realtà anche l'accelerazione a sua volta è una funzione di t e quindi potremmo introdurre la sua variazione rispetto al tempo, ma la meccanica si ferma alle accelerazioni ...

Dal punto di vista matematico si ha:

$$v \;=\; \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \tag{2.11}$$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \tag{2.12}$$

con evidente significato dei simboli.

Un'altra cosa su cui si deve riflettere è che queste quantità sono vettori. Abbiamo bisogno, dunque, per definirle, di: modulo, direzione e verso. Nel nostro caso ci siamo ridotti ad un moto unidimensionale, percui direzione e verso positivo sono già fissati. Le variabili v ed a sono i moduli delle rispettive grandezze e se compare un segno -, vorrà dire che il verso è quello inverso a quello scelto.

2.4.1 Moto rettilineo uniforme

Si dice moto rettilineo uniforme un moto per il quale

$$v(t) = v_0 = cost\,, \tag{2.13}$$

ovvero per il quale $dv(t)/dt = 0$.

Si può allora trovare immediatamente la legge oraria, integrando la legge del moto

$$\frac{dx}{dt} = v_0\,, \tag{2.14}$$

cioè

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_0\, dt = x(t_0) + v_0 \int_{t_0}^{t} dt = x(t_0) + v_0(t - t_0)\,. \tag{2.15}$$

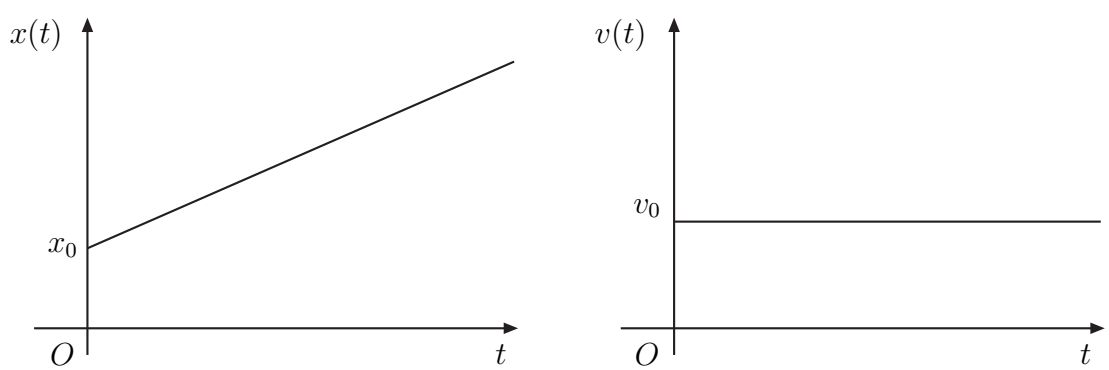
La costante $x(t_0)$ è la costante d'integrazione che necessariamente appare quando risolvo l'equazione differenziale (2.14). Per trovare una soluzione particolare, ovvero per determinare proprio il moto che sto studiando, devo imporre una condizione iniziale. Per esempio sia

$$x(t_0) = x_0\,. \tag{2.16}$$

Poniamo, senza perdere di generalità, $t_0 = 0$. Allora la soluzione del moto diventa:

$$x(t) = x_0 + v_0 t\,. \tag{2.17}$$

Possiamo riportare su due grafici il moto del punto P disegnando la velocità e lo spazio come funzione del tempo. Prendendo una velocità v_0 positiva si ha:



2.4.2 Moto uniformemente accelerato

Si dice moto uniformemente accelerato un moto per il quale

$$a(t) = a_0 = cost\,, \tag{2.18}$$

ovvero per il quale $da(t)/dt = 0$.

Si può allora trovare immediatamente la legge oraria, integrando la legge del moto

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = a_0\,, \tag{2.19}$$

cioè

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a_0\,dt = v(0) + a_0 \int_0^t dt = v(0) + a_0 t\,, \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_0^t v(t)\,dt = x(0) + \int_0^t (v(0) + a_0 t)\,dt \\ &= x(0) + v(0)t + \frac{1}{2}a_0 t^2\,. \end{aligned} \tag{2.21}$$

La (2.21) è la soluzione generale dell'equazione del moto (2.19). Abbiamo adesso dovuto risolvere un'equazione differenziale del secondo ordine e quindi abbiamo due costanti arbitrarie d'integrazione, $x(0)$ e $v(0)$. Per determinare la soluzione particolare, dobbiamo imporre le condizioni iniziali. Sia per esempio

$$x(0) = x_0\,, \tag{2.22}$$

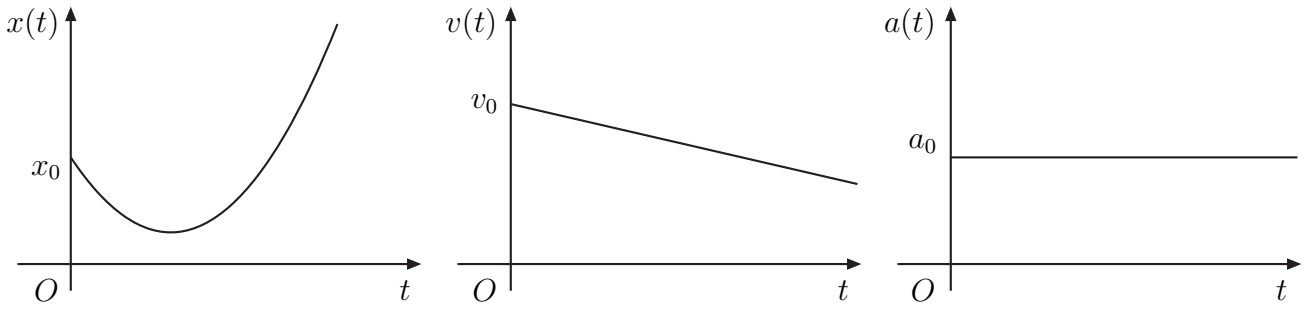
$$v(0) = v_0\,. \tag{2.23}$$

Si ha quindi:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_0 t^2\,, \tag{2.24}$$

$$v(t) = v_0 + a_0 t\,. \tag{2.25}$$

Come nel caso del moto rettilineo uniforme possiamo riportare in grafico la posizione, la velocità e l'accelerazione come funzioni del tempo. Se prendiamo la velovità v_0 negativa e l'accelerazione a_0 positiva, ottenendo i grafici seguenti.



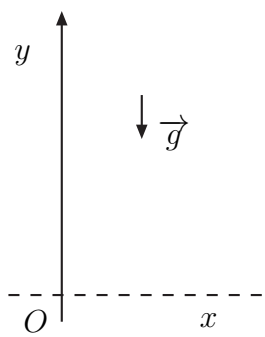
2.4.3 Esempio: caduta dei gravi

Sulla superficie terrestre si sperimenta il fatto che ogni corpo venga attratto verso terra e che cada con un'accelerazione costante e nota

$$\mathbf{a} = \mathbf{g}\,, \tag{2.26}$$

diretta verticalmente verso il basso.

Se scegliamo un SdR come in figura, in cui l'asse delle y è orientato verso l'alto



si ha

$$\mathbf{g} = -g\,\hat{\mathbf{j}}\,. \tag{2.27}$$

L'equazione del moto per un punto materiale che sia soggetto alla sola forza di gravità è quindi un moto uniformemente accelerato lungo l'asse delle y

$$\ddot{y} = -g\,. \tag{2.28}$$

Integriamo la 2.28. Si ottiene per la velocità

$$\dot{y}(t) = \dot{y}(0) - gt\,, \tag{2.29}$$

e infine l'equazione oraria:

$$y(t) = y(0) + \dot{y}(0)t - \frac{1}{2}gt^2\,. \tag{2.30}$$

Vediamo adesso due applicazioni della (2.30).

Caso 1

Supponiamo di lasciar cadere a $t = 0$ il grave da fermo da un'altezza h. Ciò si traduce nelle condizioni iniziali

$$\dot{y}(0) = 0\,, \tag{2.31}$$

$$y(0) = h\,. \tag{2.32}$$

La soluzione particolare della (2.30) è quindi

$$y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2\,. \tag{2.33}$$

Il grave arriverà a terra ad un istante t_1 tale che

$$y(t_1) = h - \frac{1}{2}gt_1^2 = 0\,, \tag{2.34}$$

ovvero

$$t_1 = \pm\sqrt{\frac{2h}{g}}\,. \tag{2.35}$$

La soluzione negativa non ha significato fisico (dall'istante $t = 0$ ammettiamo che il tempo scorra per valori positivi) quindi abbiamo

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,. \tag{2.36}$$

La velocità del grave quando tocca terra sarà

$$\dot{y}(t_1) = -gt_1 = -\sqrt{2hg}\,, \tag{2.37}$$

negativa, come deve essere nel SdR che abbiamo scelto.

Caso 2

Supponiamo adesso di lanciare il grave verso l'alto da $y = 0$ con una velocità iniziale pari a $\mathbf{v}_0 = v_0\hat{\mathbf{j}}$. Le condizioni iniziali sono quindi date da

$$\dot{y}(0) = v_0\,, \tag{2.38}$$

$$y(0) = 0\,. \tag{2.39}$$

La soluzione particolare della (2.30) è quindi

$$y(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2\,. \tag{2.40}$$

Quindi il grave torna al suolo al tempo t_1 tale da annullare $y(t_1)$:

$$y(t_1) = v_0 t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = 0\,, \tag{2.41}$$

ovvero

$$t_1(v_0 - \frac{1}{2}gt_1) = 0\,, \tag{2.42}$$

che ha soluzioni

$$t_1 = 0\,, \qquad t_1 = \frac{2v_0}{g}\,. \tag{2.43}$$

La prima soluzione corrisponde al valore iniziale. Infatti abbiamo imposto che per $t = 0$ il grave sia al suolo. La seconda soluzione, invece, corrisponde a momento in cui il grave ritocca il suolo.

La velocità con cui torna a terra è

$$v(t_1) = v_0 - gt_1 = -v_0\,, \tag{2.44}$$

che in modulo è pari alla velocità iniziale, ma ovviamente di verso opposto.

Siccome ci sono due istanti successivi per i quali $v(0) > 0$ e $v(t_1) < 0$ e la funzione $v(t)$ è continua (non stiamo considerando urti), si dovrà avere un istante t^*, con $0 < t^* < t_1$, tale che $v(t^*) = 0$. Questo è dato dalla

$$v(t^*) = v_0 - gt^* = 0\,, \tag{2.45}$$

cioè

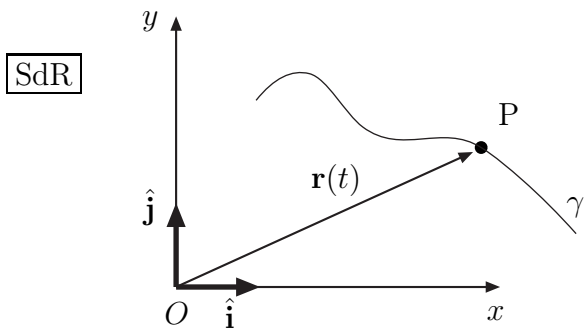
$$t^* = \frac{v_0}{g}\,. \tag{2.46}$$

Per $t^* = \frac{v_0}{g}$, il grave raggiunge l'altezza massima h, pari a

$$h = y(t^*) = ... = \frac{v_0^2}{2g}\,. \tag{2.47}$$

2.5 Moto piano generico di un punto

Supponiamo adesso che il punto materiale P si muova nel piano. Il nostro SdR sarà dato da una coppia di assi cartesiani con origine O:



Il punto P, al variare di t, descriverà la traiettoria γ. Il suo moto, o equazione oraria, sarà dato dalla variazione delle sue coordinate in funzione del tempo:

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))\,, \tag{2.48}$$

poiché per individuare completamente la configurazione di P istante per istante c'è bisogno di due parametri. Si dice che P ha 2 gradi di libertà.

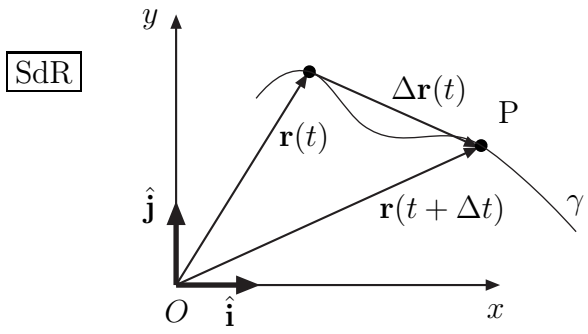
Consideriamo la definizione di velocità media che avevamo dato nei paragrafi precedenti a proposito del moto rettilineo ed estendiamola al caso del moto in $\mathbb{R}^2$. Il punto P all'istante t sarà individuato dal raggio vettore $\mathbf{r}(t)$ e al tempo successivo $t+\Delta t$, dal raggio vettore $\mathbf{r}(t+\Delta t)$. Possiamo quindi devinire il vettore velocità media come segue:

$$\overline{\mathbf{v}}(t) = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}\,. \tag{2.49}$$

La velocità media è un vettore, che ha come modulo

$$\|\overline{\mathbf{v}}(t)\| = \frac{\|\Delta \mathbf{r}\|}{\Delta t}\,, \tag{2.50}$$

e come direzione e verso quelle di $\Delta\mathbf{r}$ (come mostrato in figura).

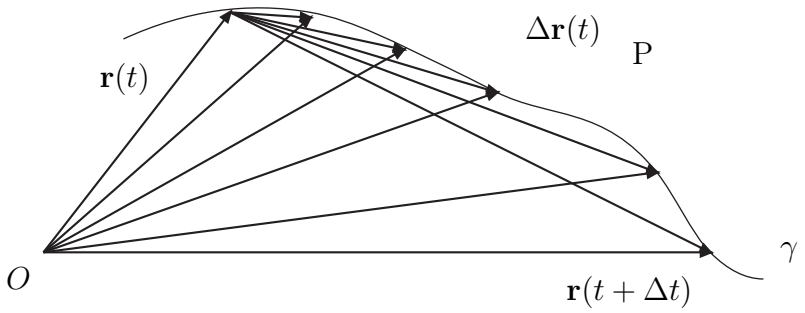


2.5.1 Derivata del vettore posizione

Per definire la velovità istantanea, dovremo fare il limite $\Delta t \to 0$. La velocità istantanea sarà quindi definita come:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \tag{2.51}$$

È facile vedere come al tendere di $\Delta t \to 0$, il vettore $\overline{\mathbf{v}}(t)$ tenda ad un vettore tangente alla traiettoria nel punto $\mathbf{r}(t)$. Infatti, il vettore $\Delta\mathbf{r}$ ha il modulo che tende a zero come Δt, in maniera tale che il loro rapporto tenda a $\|\mathbf{v}\|$; la sua direzione invece tende alla tangente alla traiettoria nel punto t (come si vede per costruzione in figura) e il verso è quello del moto.



Se $\hat{\mathbf{t}}$ è il versore tangente alla traiettoria γ nel punto $\mathbf{r}(t)$, si potrà esprimere la velocità come

$$\dot{\mathbf{r}} = \|\mathbf{v}\|\hat{\mathbf{t}}\,. \tag{2.52}$$

Per capire meglio il significato di $\|\mathbf{v}\|$, è conveniente utilizzare la parametrizzazione naturale della curva γ.

2.6 Parametrizzazione naturale

Se $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ è la forma parametrica della traiettoria, fissato un t_0 e quindi un punto su di essa, $\mathbf{r}(t_0)$, è possibile misurare la lunghezza della curva da $\mathbf{r}(t_0)$ a $\mathbf{r}(t)$ tramite il seguente integrale

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|d\mathbf{r}\| = \int_{t_0}^{t} \frac{\|d\mathbf{r}\|}{dt} dt = \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{v}(t)\| dt\,. \tag{2.53}$$

Proprietà 2.6.1 *La lunghezza di una curva NON dipende dalla scelta della sua parametrizzazione.*

Infatti, sia τ un nuovo parametro tale che $t = t(\tau)$ sia una funzione almeno $\mathbb{C}^1$ nell'intervallo d'interesse (cioè sia invertibile). Allora $\mathbf{r}(t(\tau)) = \mathbf{r}(\tau)$ con $t \in (a, b)$ e $\tau \in (a', b')$ tali che $t(a') = a$ e $t(b') = b$. Allora

$$s(t) = \int_a^b \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt = \int_{a'}^{b'} \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{d\tau} \right\| d\tau = \int_{a'}^{b'} \left\| \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \right\| d\tau \,. \tag{2.54}$$

Proprietà 2.6.2 *Qualunque curva differenziabile e non singolare ammette una parametrizzazione "naturale" tramite la lunghezza d'arco.*

Infatti, siccome

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt \,, \tag{2.55}$$

si avrà che:

$$\frac{ds}{dt} = \dot{\mathbf{r}}(t) \geq 0 \,. \tag{2.56}$$

In particolare ci sarà un intervallo intorno a t in cui

$$\frac{ds}{dt} = \dot{\mathbf{r}}(t) > 0 \,, \tag{2.57}$$

ciaoè in cui $s(t)$ è monotona crescente e quindi invertibile. L'inversa è

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|} > 0 \,. \tag{2.58}$$

Allora s la posso utilizzare per parametrizzare γ invece di t e avrò

$$\mathbf{r}(t(s)) = \mathbf{r}(s) \,. \tag{2.59}$$

Derivando rispetto ad s, trovo il versore tangente $\hat{\mathbf{t}}$. Infatti

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{1}{\left\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right\|} = \hat{\mathbf{t}} \,, \tag{2.60}$$

che è tangente alla traiettoria per costruzione (ragionamento identico a quanto fatto per la derivata rispetto a t) e ha banalmente modulo 1.

2.7 Velocità e accelerazione

Tramite la parametrizzazione naturale della traiettoria è possibile esprimere in maniera più chiara la velocità $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}(t)$ e anche l'accelerazione.

Parametrizzando la curva con s, invece che con t, si trova:

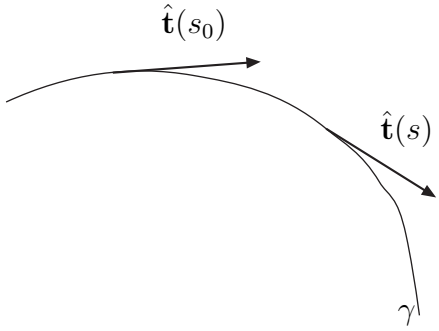
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}\,\hat{\mathbf{t}} \,. \tag{2.61}$$

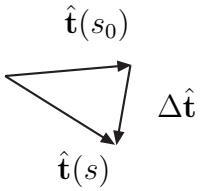
La $\dot{s}$ è detta velocità scalare e ci dice effettivamente che $\|\mathbf{v}\|$ è la velocità di spostamento lungo la curva γ, ovvero "quanta lunghezza di curva P percorre nell'unità di tempo". Se potessimo "stirare" la curva γ ad una traiettoria rettilinea, la $\dot{s}$ sarebbe proprio la $\dot{x}$ definita nel paragrafo del moto rettilineo.

Per quanto riguarda l'accelerazione, la situazione in due dimensioni invece è più complicata. Abbiamo:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{s}\,\hat{\mathbf{t}} + \dot{s}\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt} = \ddot{s}\,\hat{\mathbf{t}} + \dot{s}\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds}\frac{ds}{dt} = \ddot{s}\,\hat{\mathbf{t}} + \dot{s}^2\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds}\,. \tag{2.62}$$

Dobbiamo vedere a cosa corrisponde la derivata rispetto ad s del versore tangente $\hat{\mathbf{t}}$. Facendo lo stesso ragionamento di quello fatto per $\mathbf{t}$, si vede che $\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds}$ è un vettore perpendicolare a $\hat{\mathbf{t}}$ che punta verso la concavità della curva γ.





$$\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\hat{\mathbf{t}}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\hat{\mathbf{t}}(s)-\hat{\mathbf{t}}(s_0)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\hat{\mathbf{t}}(s_0+\Delta s)-\hat{\mathbf{t}}(s_0)}{\Delta s} \tag{2.63}$$

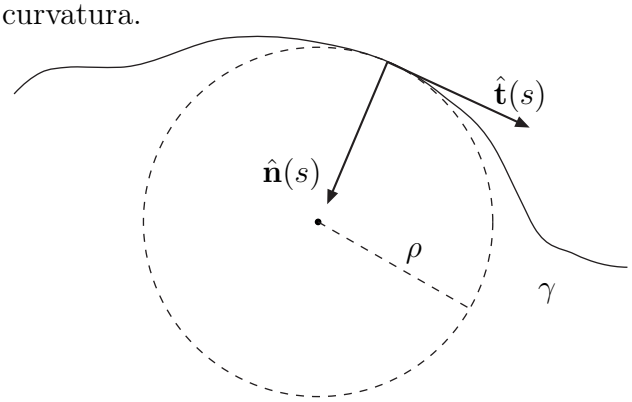
e, come si vede, per $\Delta s \to 0$ il vettore $\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds}$ diventa perpendicolare a $\mathbf{t}$, puntando verso la concavità di γ. Detto $\hat{\mathbf{n}}(s)$ il versore normale alla curva nel punto s. Si avrà allora:

$$\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = k(s)\hat{\mathbf{n}}(s)\,, \tag{2.64}$$

dove il fattore di proporzionalità $k(s)$ è detto curvatura della curva γ in s ed è l'inverso del raggio del cerchio osculatore di γ in s:

$$k(s) = \frac{1}{\rho} \tag{2.65}$$

ρ è detto raggio di curvatura.



Infine si ha:

$$\mathbf{v} \;=\; \dot{s}\,\hat{\mathbf{t}}\,, \tag{2.66}$$

$$\mathbf{a} \;=\; \ddot{s}\,\hat{\mathbf{t}} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\,\hat{\mathbf{n}}\,. \tag{2.67}$$

Si vede quindi che, mentre la velocità è tangente alla traiettoria, l'accelerazione ha due componenti: una componente tangente ed una normale, diretta verso la concavità della γ. La componente tangenziale è quella che mi dice come varia la velocità lungo la curva. Se si prendesse il limite $\rho \to \infty$, cioè se la traiettoria diventasse rettilinea (curvatura nulla), il termine $\ddot{s}$ sarebbe esattamente l'$\ddot{x}$ del moto retilineo che abbiamo trattato nei paragrafi precedenti. Il termine di curvatura, ci dice che per cambiare direzione nel piano c'è bisogno di una componente "centripeta" dell'accelerazione.

L'Eq. (2.64) è la prima parte del teorema di Frenet.

Teorema 2.7.1 *Per una curva differenziabile non singolare di parametrizzazione naturale s si ha:*

$$\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} \;=\; k(s)\hat{\mathbf{n}}(s)\,, \tag{2.68}$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds} \;=\; -k(s)\hat{\mathbf{t}}(s)\,. \tag{2.69}$$

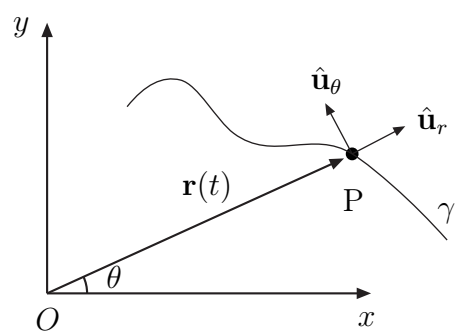
Per dimostrare la seconda relazione, Eq. (2.69), basta notare che da $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 1$ segue che $d\hat{\mathbf{n}}/ds \propto \hat{\mathbf{t}}$. Inoltre da $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{t}} = 0$ segue che

$$\frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds} \cdot \hat{\mathbf{t}} = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = -k(s)\,, \tag{2.70}$$

da cui la (2.69).

2.8 Moto piano in coordinate polari

Per i moti piani fa comodo, a volte, introdurre un sistema di coordinate polari (r, θ)



in modo da avere, come equazioni per la traiettoria, le

$$(r(t),\, \theta(t))\,. \tag{2.71}$$

Per individuare la parte vettoriale, introdurremo una coppia di versori mobili, solidali con P, $\hat{\mathbf{u}}_r$ e $\hat{\mathbf{u}}_\theta$ tali che $\hat{\mathbf{u}}_r$ sia il versore prolungamento del raggio vettore e $\hat{\mathbf{u}}_\theta$ il versore perpendicolare ad $\hat{\mathbf{u}}_r$ ottenuto ruotando $\hat{\mathbf{u}}_r$ di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario:

$$\hat{\mathbf{u}}_r \;=\; \cos\theta\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\hat{\mathbf{j}}\,,$$

$$\hat{\mathbf{u}}_\theta = -\sin\theta\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\hat{\mathbf{j}}\,. \tag{2.72}$$

Come si vede, si ha

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt} &= -\dot{\theta}\sin\theta\hat{\mathbf{i}} + \dot{\theta}\cos\theta\hat{\mathbf{j}} = \dot{\theta}\hat{\mathbf{u}}_\theta \\ \frac{d\hat{\mathbf{u}}_\theta}{dt} &= -\dot{\theta}\cos\theta\hat{\mathbf{i}} - \dot{\theta}\sin\theta\hat{\mathbf{j}} = -\dot{\theta}\hat{\mathbf{u}}_r\end{aligned} \tag{2.73}$$

Infine si ha:

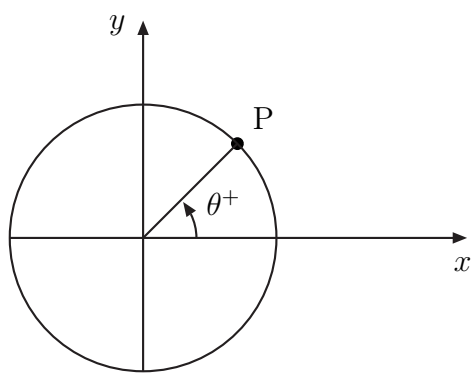
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{\mathbf{u}}_r) = \dot{r}\hat{\mathbf{u}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathbf{u}}_\theta\,, \tag{2.74}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{r}\hat{\mathbf{u}}_r + 2\dot{r}\dot{\theta}\hat{\mathbf{u}}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{\mathbf{u}}_\theta - r\dot{\theta}^2\hat{\mathbf{u}}_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{u}}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\mathbf{u}}_\theta\,. \tag{2.75}$$

2.9 Moto circolare

Se la traiettoria è costituita da una circonferenza, avremo:

$$\begin{cases} r = cost\,, \\ \theta = \theta(t)\,. \end{cases} \tag{2.76}$$



La velocità e l'accelerazione del moto circolare sono date da

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= r\,\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{u}}_\theta\,, \\ \mathbf{a} &= -r\,\dot{\theta}^2\,\hat{\mathbf{u}}_r + r\,\ddot{\theta}\,\hat{\mathbf{u}}_\theta\,,\end{aligned} \tag{2.77}$$

che sono le (2.74,2.75) in cui abbiamo posto $\dot{r} = 0$. La velocità, quindi, è tangente alla traiettoria e di modulo $r\dot{\theta}$, mentre l'accelerazione continua ad avere una parte tangente ed una normale.

Moto circolare uniforme

Se il moto è *uniforme*, cioè se

$$\dot{\theta} = cost\,, \tag{2.78}$$

allora si ha:

$$\mathbf{v} = r\,\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{u}}_\theta\,,$$

$$\mathbf{a} \;=\; -r\,\dot{\theta}^2\,\hat{\mathbf{u}}_r\,, \tag{2.79}$$

con la velocità costante in modulo. L'accelerazione adesso è solo normale e diretta verso il centro del cerchio. Per i moduli si ha:

$$\|\mathbf{a}\| = r\,\dot{\theta}^2 = \frac{r^2\,\dot{\theta}^2}{r} = \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{r}\,. \tag{2.80}$$

Moto periodico

Il moto circolare uniforme è un primo esempio di *moto periodico*, ovvero di un moto che dopo un certo lasso di tempo, che chiameremo *periodo* e indicheremo con T, si riproduce uguale a sé stesso.

Sia $n \in \mathbb{N}$. Allora un moto periodico è caratterizzato dalla seguente equazione

$$\mathbf{r}(t + nT) = \mathbf{r}(t)\,, \quad \text{per}\,\forall t \in \mathbb{R}\,. \tag{2.81}$$

Nel nostro caso particolare (moto circolare uniforme) ad ogni periodo T l'angolo θ ha un incremento di 2π:

$$\theta(t + T) = \theta(t) + 2\pi\,. \tag{2.82}$$

Si definisce *frequenza* del moto periodico, l'inverso del periodo

$$\nu = \frac{1}{T} \tag{2.83}$$

e *pulsazione*

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}\,. \tag{2.84}$$

2.10 Moto armonico

Studiamo in dettaglio la relazione fra accelerazione e raggio vettore nel moto circolare uniforme. Si ha

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = -r\,\dot{\theta}^2\,\hat{\mathbf{u}}_r = -\dot{\theta}^2\mathbf{r}\,, \tag{2.85}$$

ovvero

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega^2\mathbf{r} = 0\,, \tag{2.86}$$

dove abbiamo posto $\omega = \dot{\theta}$. Proiettiamo l'Eq. (2.86) sugli assi cartesiani. Si ottiene

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0\,, \tag{2.87}$$

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0\,. \tag{2.88}$$

Su entrambi gli assi cartesiani si compie lo stesso moto. L'equazione del secondo ordine

$$\ddot{f} + \omega^2 f = 0\,, \tag{2.89}$$

si dice equazione del *moto armonico*.

È facile verificare che una soluzione generale della (2.89) è data dalla

$$f(t) = A\,\cos\left(\omega\,t + \phi\right)\,. \tag{2.90}$$

Infatti

$$\dot{f} = -A\,\omega \sin(\omega\, t + \phi)\,, \tag{2.91}$$
$$\ddot{f} = -A\,\omega^2 \cos(\omega\, t + \phi) = -\omega^2\, f\,. \tag{2.92}$$

Le due costanti A e ϕ sono le costanti arbitrarie d'integrazione e dovranno essere fissate imponendo le condizioni iniziali del moto. A è detta ampiezza e ϕ la fase. Supponiamo di avere le seguenti condizioni iniziali:

$$\begin{cases} f(0) = f_0\,, \\ \dot{f}(0) = \dot{f}_0\,. \end{cases} \tag{2.93}$$

Allora, considerando la soluzione generale (2.90), avremo

$$A\cos\phi = f_0\,, \tag{2.94}$$
$$-A\omega\sin\phi = \dot{f}_0 \tag{2.95}$$

e, risolvendo il sistema, si trova

$$\phi = -\arctan\left(\frac{\dot{f}_0}{\omega\, f_0}\right) \tag{2.96}$$

e considerando che dalle (2.95) si ottiene

$$A^2\sin^2\phi + A^2\cos^2\phi = A^2 = f_0^2 + \frac{\dot{f}_0^2}{\omega^2}\,, \tag{2.97}$$

si trova anche l'ampiezza

$$A = \sqrt{f_0^2 + \frac{\dot{f}_0^2}{\omega^2}}\,. \tag{2.98}$$

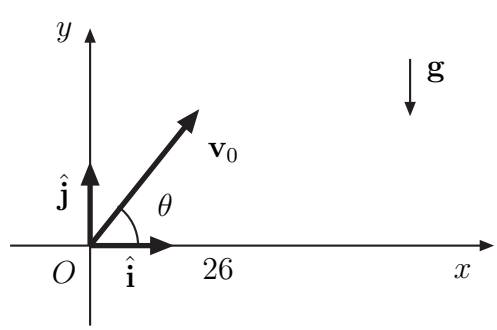
La soluzione particolare del moto è data quindi da

$$f(t) = \sqrt{f_0^2 + \frac{\dot{f}_0^2}{\omega^2}}\cos\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\dot{f}_0}{\omega\, f_0}\right)\right) \tag{2.99}$$

2.11 Esempio di moto piano: balistica

Studiamo il moto di un grave nel campo di gravità terrestre. Il grave sarà sottoposto all'azione della gravità e quindi avrà una accelerazione costantemente rivolta verso il basso, agente sungo l'asse verticale e di modulo costante, indipendentemente dal punto del piano in cui si trova il grave.

Prendiamo un SdR cartesiano, con asse delle ordinate rivolto verso l'alto.



Nel nostro SdR avremo:

$$\mathbf{g} = -g\,\hat{\mathbf{j}}\,. \tag{2.100}$$

Supponiamo di voler studiare il moto di un punto materiale (il "grave") proiettato con velosità iniziale $\mathbf{v}_0$ dall'origine degli assi. Avremo

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 &= v_{0x}\hat{\mathbf{i}} + v_{0y}\hat{\mathbf{j}}\,, & (2.101)\\ \|\mathbf{v}_0\| &= \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = v_0\,, & (2.102) \end{aligned}$$

dove quindi $v_{0x} = v_0 \cos\theta$ e $v_{0y} = v_0 \sin\theta$.

L'equazione del moto del punto materiale, in coordinate cartesiane, sarà

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= 0\,, & (2.103)\\ \ddot{y}(t) &= -g\,. & (2.104) \end{aligned}$$

Le condizioni iniziali sono date dalle seguenti due coppie di relazioni

$$\begin{aligned} x(0) &= 0\,, & (2.105)\\ \dot{x}(0) &= v_{0x} = v_0 \cos\theta\,, & (2.106) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y(0) &= 0\,, & (2.107)\\ \dot{y}(0) &= v_{0y} = v_0 \sin\theta\,. & (2.108) \end{aligned}$$

Integriamo le equazioni (2.103,2.104). Si ha

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{x}(0)\,, & (2.109)\\ \dot{y}(t) &= \dot{y}(0) - g\int_0^t dt = \dot{y}(0) - gt\,, & (2.110) \end{aligned}$$

dove abbiamo introdotto le prime due costanti arbitrarie $\dot{x}(0)$ e $\dot{y}(0)$, che possono essere fissate usando le (2.106,2.108).

Integrando un'altra volta otteniamo

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_0^t \dot{x}(0)dt = x(0) + \dot{x}(0)t\,, & (2.111)\\ y(t) &= y(0) + \int_0^t (\dot{y}(0) - gt)dt = y(0) + \dot{y}(0)t - \frac{1}{2}gt^2\,. & (2.112) \end{aligned}$$

Imponendo quindi le condizioni iniziali, si hanno le seguenti soluzioni particolari delle equazioni del moto:

$$x(t) = v_0 \cos\theta\, t\,, \tag{2.113}$$

$$y(t) \;=\; v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g\, t^2 \,. \tag{2.114}$$

Le equazioni (2.113,2.114) ci mostrano come il moto possa essere pensato come composto da due moti indipendenti: un moto uniforme lungo le x e un moto uniformemente accelerato lungo le y.

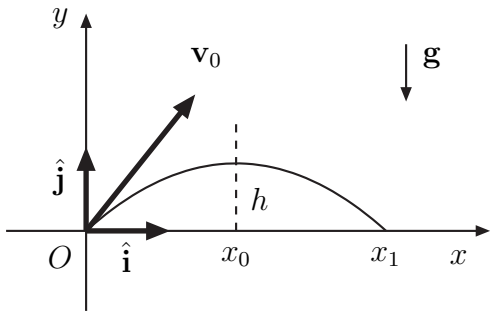
Traiettoria

Le (2.113,2.114) costutiscono una forma parametrica della traiettoria del punto. Possiamo trovare una forma "esplicita" come $y = y(x)$ ricavando il parametro da una delle due equazioni e sostituendolo nell'altra:

$$t \;=\; \frac{x}{v_0 \cos\theta} \,, \tag{2.115}$$

$$y \;=\; -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta}\, x^2 + \tan(\theta)\, x \,. \tag{2.116}$$

La (2.116) è una parabola discendente passante per l'origine.



Il punto in cui P tocca di nuovo il suolo è dato dal'equazione $y(x) = 0$:

$$x \left(-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta}\, x + \tan(\theta) \right) = 0 \,, \tag{2.117}$$

che ha per soluzioni $(0, 0)$, punto da cui P parte, e $(x_1, 0)$ con

$$x_1 = \frac{2v_0^2}{g} \sin\theta \cos\theta = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta) \,. \tag{2.118}$$

La quota massima raggiunta nel moto può essere trovata estremando la $y = y(x)$. Si ha un massimo per

$$\frac{dy}{dx} = 0 = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2\theta}\, x + \tan(\theta) \,, \tag{2.119}$$

da cui

$$x = x_0 = \frac{v_0^2}{g} \sin\theta \cos\theta \,, \tag{2.120}$$

che sostituita nella (2.116) dà

$$h = y(x_0) = ... = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2\theta \,. \tag{2.121}$$

Gittata

Un'altra possibile domanda che ci possiamo porre è quale sia la *gittata* (cioè l'x_1) massima, a parità di v_0, in funzione di θ.

Dalla (2.118), estremando rispetto a θ si può cercare il massimo:

$$\frac{dx_1}{d\theta} = 2\frac{v_0^2}{g}\cos(2\theta) = 0\,, \tag{2.122}$$

che dà la seguente soluzione (ci possiamo limitare, per la geometria del problema, a cercare una soluzione nell'intervallo $0 < \theta < \pi/2$):

$$\theta = \frac{\pi}{4}\,. \tag{2.123}$$

Ciò vuol dire che se $v_0 \neq 0$, la gittata massima si ottiene sempre sparando a 45°, indipendentemente dalla velocità iniziale del proiettile.

Alzata

Chiediamoci adesso quale sia l'*alzata*, ovvero l'angolo θ, che mi permetta di colpire il punto di coordinate $(l, 0)$.

Imponendo il passaggio della traiettoria da questo punto, troviamo

$$0 = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\,l^2 + \tan(\theta)\,l = \frac{l}{2\cos^2\theta}\left(2\sin\theta\cos\theta - \frac{gl}{v_0^2}\right)\,. \tag{2.124}$$

Se $\theta \neq \pi/2$, cosa che è ben verificata, visto che se spariamo il proiettile in verticale non abbiamo nessuna possibilità di prendere il bersaglio a $(l, 0)$, allora $\cos\theta \neq 0$ e quindi la (2.124) è soddisfatta se

$$\sin(2\theta) = \frac{gl}{v_0^2}\,. \tag{2.125}$$

La (2.125) ammette soluzioni se

$$\frac{gl}{v_0^2} \leq 1\,, \tag{2.126}$$

ovvero, se, data una certa distanza l alla quale vogliamo colpire il bersaglio, la velocità iniziale del proiettile è "sufficientemente alta ($v_0 \geq \sqrt{lg}$).

Se $v_0 = \sqrt{lg}$, la (2.125) ha un'unica soluzione, per $\theta = \pi/4$.

Se invece $v_0 > \sqrt{lg}$, si hanno due soluzioni:

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{gl}{v_0^2}\right)\,, \tag{2.127}$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_1\,. \tag{2.128}$$

Il fatto che ci siano due soluzioni, ci dice che se la velocità iniziale del proiettile è sufficientemente alta, possiamo colpire il bersaglio sparando con un'alzata inferiore ai 45° (in tal caso la traiettoria si dirà *diretta*) oppure con un'alzata superiore a tale angolo limite (traiettoria *inversa*).

Tempi

Quanto tempo impiega il proiettile a raggiungere di nuovo terra?

Utilizzando l'Eq. (2.114) e imponendo $y(t) = 0$, si trova l'istante desiderato:

$$t\left(-\frac{1}{2}gt + v_0 \sin\theta\right) = 0\,, \tag{2.129}$$

e quindi, se non consideriamo l'istante iniziale $t = 0$, si trova

$$t = \frac{2v_0}{g}\sin\theta\,. \tag{2.130}$$

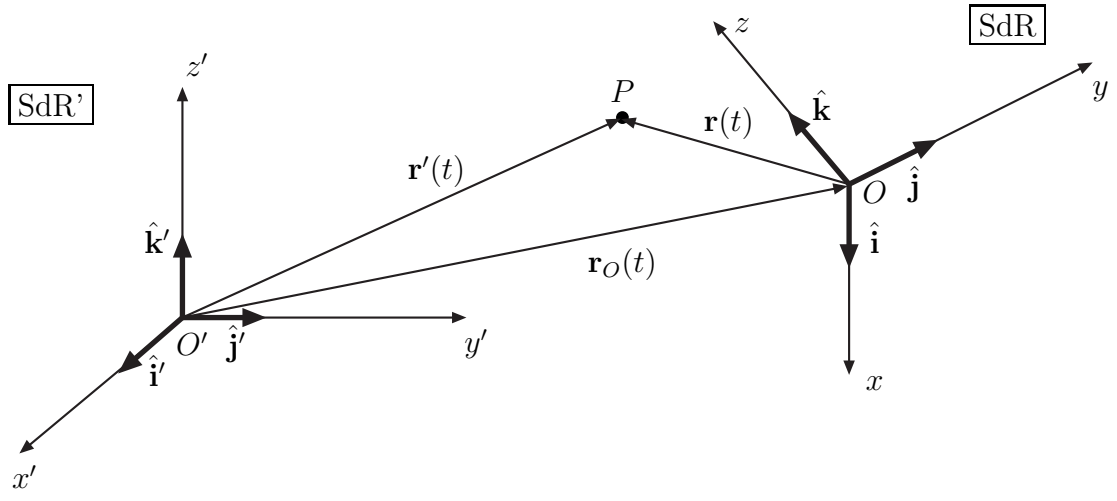
Avremmo potuto anche considerare il moto uniforme lungo le x, Eq. (2.113), e imporre $x = x_1$ trovando

$$t = \frac{x_1}{v_0\cos\theta} = \frac{2v_0}{g}\sin\theta\,, \tag{2.131}$$

dove abbiamo usato la (2.118).

2.12 Cinematica relativa

Ci poniamo adesso il problema di studiare quali sono le relazioni che legano la cinematica di un punto P in un sistema di riferimento, che chiameremo *mobile*, rispetto ad un sistema di riferimento: che chiameremo *fisso*. Il sistema fisso lo denoteremo con SdR' e sarà costituito dai tre assi cartesiani (x', y', z') e dell'origine O'. L'altro, in moto rototraslatorio rispetto al primo, sarà indicato con SdR, con assi (x, y, z) ed origine O:



Il raggio vettore del punto P nel sistema fisso è dato da $\mathbf{r}'(t)$ e rappresenta la configurazione del punto vista da un osservatore solidale al sistema SdR'. Il raggio vettore $\mathbf{r}(t)$, invece, individua il punto P come visto da un osservatore nel sistema di riferimento mobile, SdR. $\mathbf{r}_O(t)$, poi, individua l'origine del SdR mobile nel SdR' fisso. Il tempo (assoluto) scorre allo stesso modo per i due sistemi di riferimento. Avremo:

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}_O(t) + \mathbf{r}(t)\,, \tag{2.132}$$

dove quindi

$$\mathbf{r}_O(t) = x_O(t)\hat{\mathbf{i}}' + y_O(t)\hat{\mathbf{j}}' + z_0(t)\hat{\mathbf{k}}' \,, \tag{2.133}$$

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}} \,. \tag{2.134}$$

Ricordiamo che i versori solidali al SdR mobile sono funzioni del tempo e cambiano con esso la loro posizione, rispetto a SdR'.

Cerchiamo una relazione che leghi fra loro la velocità che misurerebbe l'osservatore nel SdR' fisso e quella che misurerebbe l'osservatore nel SdR' mobile. Derivando rispetto al tempo la relazione (2.132) si ottiene

$$\mathbf{v} = \dot{x}_O\hat{\mathbf{i}}' + \dot{y}_O\hat{\mathbf{j}}' + \dot{z}_O\hat{\mathbf{k}}' + \dot{x}\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}\hat{\mathbf{j}} + \dot{z}\hat{\mathbf{k}} + x\frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} + y\frac{d\hat{\mathbf{j}}}{dt} + z\frac{d\hat{\mathbf{k}}}{dt} \,, \tag{2.135}$$

$$= \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_R + x\frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} + y\frac{d\hat{\mathbf{j}}}{dt} + z\frac{d\hat{\mathbf{k}}}{dt} \,. \tag{2.136}$$

Nell'Eq.(2.136), il vettore $\mathbf{v} = d\mathbf{r}'/dt$ è la velocità del punto P in SdR'; $\mathbf{v}_O$ è la velocità dell'origine del sistema SdR nel sistema SdR'; $\mathbf{v}_R$ è la *velocità relativa*, ovvero la velocità di P vista dal sistema di riferimento mobile, SdR. L'ultimo termine, però, coinvolge le derivate temporali dei versori di SdR rispetto al tempo. Siccome $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1$, si ha che

$$\frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{i}}) = 2\frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt}\cdot\hat{\mathbf{i}} = 0 \tag{2.137}$$

e questo vale anche per $\hat{\mathbf{j}}$ e $\hat{\mathbf{k}}$. Cioè le derivate temporali dei tre versori sono rispettivamente ortogonali ai versori stessi. Possiamo, allora, introdurre tre vettori, $\overrightarrow{\omega}_1$, $\overrightarrow{\omega}_2$ ed $\overrightarrow{\omega}_3$, tali che:

$$\frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} = \overrightarrow{\omega}_1 \wedge \hat{\mathbf{i}} \,, \quad \frac{d\hat{\mathbf{j}}}{dt} = \overrightarrow{\omega}_2 \wedge \hat{\mathbf{j}} \,, \quad \frac{d\hat{\mathbf{k}}}{dt} = \overrightarrow{\omega}_3 \wedge \hat{\mathbf{k}} \,. \tag{2.138}$$

Si può dimostrare che

Teorema 2.12.1 *(di Poisson) Esiste uno e un solo $\overrightarrow{\omega}$ tale che $\overrightarrow{\omega}_1 = \overrightarrow{\omega}_2 = \overrightarrow{\omega}_3 = \overrightarrow{\omega}$.*

Per dimostrare il teorema dobbiamo mostrare che si può trovare tale $\overrightarrow{\omega}$ e che questo è unico. Notiamo che

$$\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = 0 \,, \quad \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 0 \,, \quad \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = 0 \,, \tag{2.139}$$

che, derivate, danno le

$$\frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt}\cdot\hat{\mathbf{j}} = -\frac{d\hat{\mathbf{j}}}{dt}\cdot\hat{\mathbf{i}} \,, \quad \frac{d\hat{\mathbf{j}}}{dt}\cdot\hat{\mathbf{k}} = -\frac{d\hat{\mathbf{k}}}{dt}\cdot\hat{\mathbf{j}} \,, \quad \frac{d\hat{\mathbf{k}}}{dt}\cdot\hat{\mathbf{i}} = -\frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt}\cdot\hat{\mathbf{k}} \,, \tag{2.140}$$

dalle quali, sostituendo le (2.138) ed eseguendo i vari prodotti misti, si trova

$$\overrightarrow{\omega}_1 \wedge \hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \overrightarrow{\omega}_2 \wedge \hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{j}} \,, \quad \overrightarrow{\omega}_2 \wedge \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = \overrightarrow{\omega}_3 \wedge \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{k}} \,, \quad \overrightarrow{\omega}_3 \wedge \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = \overrightarrow{\omega}_1 \wedge \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{i}} \,. \tag{2.141}$$

Scriviamo i tre vettori $\overrightarrow{\omega}_i$ in componenti:

$$\overrightarrow{\omega}_i = \omega_{i,1}\hat{\mathbf{i}} + \omega_{i,2}\hat{\mathbf{j}} + \omega_{i,3}\hat{\mathbf{k}} \,. \tag{2.142}$$

Per la prima delle (2.141) si ha:

$$(\omega_{1,1}\hat{\mathbf{i}} + \omega_{1,2}\hat{\mathbf{j}} + \omega_{1,3}\hat{\mathbf{k}}) \wedge \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = (-\omega_{1,2}\hat{\mathbf{k}} + \omega_{1,3}\hat{\mathbf{j}}) \cdot \hat{\mathbf{j}} = \omega_{1,3}\,, \tag{2.143}$$

$$(\omega_{2,1}\hat{\mathbf{i}} + \omega_{2,2}\hat{\mathbf{j}} + \omega_{2,3}\hat{\mathbf{k}}) \wedge \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = (-\omega_{2,2}\hat{\mathbf{k}} + \omega_{2,3}\hat{\mathbf{j}}) \cdot \hat{\mathbf{j}} = \omega_{2,3}\,. \tag{2.144}$$

Da cui si ottiene

$$\omega_{1,3} = \omega_{2,3} = \omega_3\,. \tag{2.145}$$

Dalla seconda delle (2.141), analogamente, si ottiene la

$$\omega_{2,1} = \omega_{3,1} = \omega_1\,, \tag{2.146}$$

e dalla terza

$$\omega_{3,2} = \omega_{1,2} = \omega_2\,. \tag{2.147}$$

Quindi i tre vettori si possono scrivere come segue:

$$\overrightarrow{\omega}_1 = \omega_{1,1}\hat{\mathbf{i}} + \omega_2\hat{\mathbf{j}} + \omega_3\hat{\mathbf{k}}\,, \tag{2.148}$$

$$\overrightarrow{\omega}_2 = \omega_1\hat{\mathbf{i}} + \omega_{2,2}\hat{\mathbf{j}} + \omega_3\hat{\mathbf{k}}\,, \tag{2.149}$$

$$\overrightarrow{\omega}_3 = \omega_1\hat{\mathbf{i}} + \omega_2\hat{\mathbf{j}} + \omega_{3,3}\hat{\mathbf{k}}\,. \tag{2.150}$$

Rimangono da determinare le tre componenti $\omega_{1,1}$, $\omega_{2,2}$ e $\omega_{3,3}$, che non sono vincolate da nessuna relazione. Quindi potremo scegliere

$$\omega_{1,1} = \omega_1\,, \quad \omega_{2,2} = \omega_2\,, \quad \omega_{3,3} = \omega_3\,, \tag{2.151}$$

trovando così $\overrightarrow{\omega}_1 = \overrightarrow{\omega}_2 = \overrightarrow{\omega}_3 = \overrightarrow{\omega}$, dove

$$\overrightarrow{\omega} = \omega_1\,\hat{\mathbf{i}} + \omega_2\,\hat{\mathbf{j}} + \omega_3\,\hat{\mathbf{k}}\,. \tag{2.152}$$

Ponendo un solo $\overrightarrow{\omega}$ nelle (2.138), si ottengono le così dette *formule di Poisson*:

$$\frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} = \overrightarrow{\omega} \wedge \hat{\mathbf{i}}\,, \tag{2.153}$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{j}}}{dt} = \overrightarrow{\omega} \wedge \hat{\mathbf{j}}\,, \tag{2.154}$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{k}}}{dt} = \overrightarrow{\omega} \wedge \hat{\mathbf{k}}\,. \tag{2.155}$$

Il vettore $\overrightarrow{\omega}$ si dice *velocità angolare* di SdR rispetto ad SdR'. Per ogni versore $\hat{\mathbf{w}}$ solidale con SdR si ha che

$$\frac{d\hat{\mathbf{w}}}{dt} = \overrightarrow{\omega} \wedge \hat{\mathbf{w}}\,. \tag{2.156}$$

Se $\overrightarrow{\omega}$ non fosse unico, si potrebbe definire un $\overrightarrow{\omega}'$ tale che valga anche

$$\frac{d\hat{\mathbf{w}}}{dt} = \overrightarrow{\omega}' \wedge \hat{\mathbf{w}}\,. \tag{2.157}$$

Ma allora

$$(\overrightarrow{\omega} - \overrightarrow{\omega}') \wedge \hat{\mathbf{w}} = 0\,, \tag{2.158}$$

e siccome $\hat{\mathbf{w}}$ è arbitrario, ne segue che ciò è verificato solo se $(\overrightarrow{\omega} - \overrightarrow{\omega}') = 0$, ovvero se $\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{\omega}'$.

Ritornando alla formula per la velocità, allora, si ha:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_R + \overrightarrow{\omega} \wedge \mathbf{r} \tag{2.159}$$

Si usa porre

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{v}_O + \overrightarrow{\omega} \wedge \mathbf{r}\,. \tag{2.160}$$

$\mathbf{v}_t$ viene detta *velocità di trascinamento* di P. In tal modo si può porre

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_t + \mathbf{v}_R\,. \tag{2.161}$$

Deriviamo la formula per le velocità e otteniamo una relazione per le accelerazioni. Si troverà:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_R + 2\overrightarrow{\omega} \wedge \mathbf{v}_R + \dot{\overrightarrow{\omega}} \wedge \mathbf{r} + \overrightarrow{\omega} \wedge (\overrightarrow{\omega} \wedge \mathbf{r})\,. \tag{2.162}$$

Si può scrivere, allora

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_R + \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_t\,, \tag{2.163}$$

dove abbiamo posto

$$\mathbf{a}_C = 2\overrightarrow{\omega} \wedge \mathbf{v}_R\,, \tag{2.164}$$

detta *accelerazione di Coriolis* e

$$\mathbf{a}_t = \mathbf{a}_o + \dot{\overrightarrow{\omega}} \wedge \mathbf{r} + \overrightarrow{\omega} \wedge (\omega \wedge \mathbf{r})\,, \tag{2.165}$$

detta *accelerazione di trascinamento*. La $\mathbf{a}_R$ è l'accelerazione relativa, ovvero l'accelerazione del punto P che misurerebbe l'osservatore solidale con SdR.

Capitolo 3

APPUNTI DI STATICA DEL PUNTO

In questo capitolo definiamo e studiamo alcune grandezze fondamentali che poi ritroveremo nello studio della dimanica vera e propria, ovvero nello studio del moto dei corpi sottoposti ad interazione con l'ambiente o con altri corpi. L'interazione sarà la causa del moto. Data l'interazione si può prevedere il moto del sistema fisico in esame. Vice versa dato il moto si può cercare di risalire alla forma dell'interazione. L'interazione si esplica quantitativamente attraverso l'introduzione di una quantità fisica detta "forza", che studieremo in dettaglio in questo capitolo.

3.1 Forze

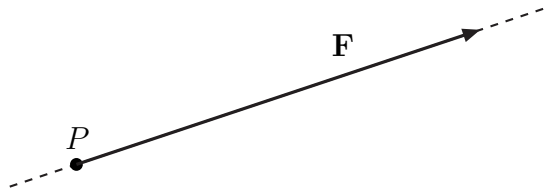
Il concetto di forza si può empiricamente far risalire a quello dello sforzo muscolare che compiamo nel cercare di mutare lo stato (configurazione) di un corpo. Da questo dobbiamo astrarre ciò che ci interessa da un punto di vista fisico, cioè:

1. Una caratterizzazione matematica della grandezza fisica;
2. Una definizione operativa che porti alla sua misura.

3.1.1 Proprietà della forza

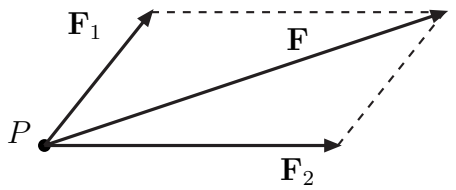
La prima tappa per definire operativamente la forza consiste nel capire come essa si comporti fisicamente.

Con esperienze elementari ci si può render conto che la forza è un *vettore applicato*, cioè per definirla c'è bisogno di quattro quantità: modulo, direzione, verso e punto di applicazione.



Graficamente tutto viene riassunto dalla freccetta in figura, che avrà lunghezza proporzionale al modulo, retta di applicazione individuata dal prolungamento tratteggiato, verso indicato dalla punta della freccia e punto di applicazione P.

L'altro fatto che evidenzia il comportamento vettoriale di una forza è la composizione di più forze agenti sullo stesso punto di applicazione. Infatti: *due forze si sommano con la regola del parallelogramma*, cioè se su P agiscono le due forze $\mathbf{F_1}$ ed $\mathbf{F_2}$, la loro azione è equivalente all'azione di una forza $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ che sia la composizione delle due secondo la regola del parallelogramma.



Questo si può verificare sperimentalmente! (Esperienza dei cavalli o dei tre dinamometri).

3.1.2 Misura statica della forza

Per descrivere il procedimento di misura statica della forza $\mathbf{F}$ agente sul punto P, dovremo ricorrere a due concetti basilari.

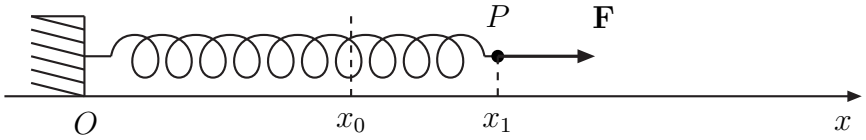
Il primo concetto è quello di *equilibrio*.

Definizione 3.1.1 *Si dice che il punto P è fermo (nel SdR considerato), se la sua configurazione non muta nel tempo.*

Se sul punto P agiscono due forze lungo la stessa direzione e con verso opposto, tali che P sia fermo, allora si dice che le due forze si *equilibrano*, hanno la stessa *intensità* (proprietà intuitiva, che deriva dall'esperienza).

Il secondo concetto riguarda una caratteristica importante di alcuni corpi quando sono soggetti ad una forza; una caratteristica che mette in evidenza l'azione della forza stessa e che quindi può essere utilizzata per misurarla. È esperieza quotidiana il fatto che se una forza agisce su un corpo reale, può deformarlo. Si pensi per esempio all'azione di una forza che agisca sull'estremità di una sbarretta metallica fissata, dall'altra estremità, ad una morsa. Spingendo in direzione ortigonale alla lunghezza della sbarretta, ci accorgiamo che la barretta si flette. La stessa cosa avviene se consideriamo una molla fissata ad una sua estremità. Agendo con una forza all'altra estremità, possiamo allungare (o comprimere) la molla. Alcuni corpi hanno la proprietà importante di tornare alla loro configurazione iniziale una volta che la sollecitazione (forza applicata) cessi (molti corpi reali hanno un comportamento elastico purché l'intensità della forza applicata sia modesta e non deformi il corpo stesso). Questi corpi si dicono *elastici*. Questa proprietà, insieme al concetto di equilibrio introdotto sopra, può essere utilizzata per misurare la forza.

Consideriamo, infatti, una molla, attaccata al muro da una estremità, e al punto P dall'altra estremità:



Una forza $\mathbf{F}$ agisce sul punto P, tirandolo nella direzione positiva delle x. Se $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, la molla non sarà sollecitata e il punto P sarà fermo all'ascissa $x = x_0$. Applichiamo adesso $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ (forza di piccola intensità, tale da garantire il comportamento elastico della molla). La molla si allungherà fino a quando non si sarà trovata una nuova situazione di equilibrio in $x = x_1$. La forza $\mathbf{F}$ continua ad agire su P, ma un'altra forza di uguale intensità, stessa direzione e verso opposto, $\mathbf{f}$, agisce su P in maniera tale da farlo stare fermo in $x = x_1$, equilibrando $\mathbf{F}$.

L'elongazione della molla, $(x_1 - x_0)$, dà una misura della forza $\mathbf{F}$ applicata in P. Infatti, agendo su P con una forza più intensa, $\mathbf{F}_1$, mi accorgerei che il punto di equilibrio trovato nella nuova situazione sarebbe $x = x_2$, tale che $(x_2 - x_0) > (x_1 - x_0)$. Ponendo di nuovo $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ riotterrei l'equilibrio in $x = x_0$. Allora, ad elongazione nulla corrisponde una forza di intensità nulla, mentre ad elongazione non nulla corrisponde una forza di intensità dipendente dall'elongazione stessa. Si potrebbe in prima approssimazione pensare ad una dipendenza lineare dall'elongazione: $\|\mathbf{F}\| \propto (x - x_0)$.

Per andare oltre nel nostro raionamento abbiamo bisogno di introdurre la forza peso. Limitiamoci al campo di gravità. È un fatto sperimentale che un corpo vicino alla superficie terrestre (nel laboratorio) sia soggetto ad una forza che lo attrae verso il basso. Per un corpo omogeneo, questa forza dipende dal volume del corpo stesso. Per corpi di natura chimica diversa si vede che dipende anche dalla natura stessa del corpo (se prendiamo lo stesso volume di due corpi diversi la forza peso è diversa). Sappiamo inoltre che tutti i corpi cadono nel campo di gravità con la stessa accelerazione $g = 9.81$ m/s^2. Questi fatti sperimentali si combinano nella legge matematica che individua la struttura della forza peso. La forza peso agente su un corpo risulta essere proporzionale alla accelerazione di gravità tramite una costante che si chiama *massa gravitazionale* del corpo stesso:

$$\mathbf{P} = m_g \, \mathbf{g} \, . \tag{3.1}$$

Sapendo che per un corpo omogeneo il peso è proporzionale al volume, possiamo agevolmente definire multipli e sottomultipli di una dato peso $\mathbf{P}$, che dovrà equilibrare la forza di richiamo della molla, proporzionale all'elongazione della stessa.

Su questi principi, possiamo costruire uno strumento di misura della forza, detto *dinamometro*, mostrato in figura. Si definisce un'unità di forza, data per esempio dalla forza che equilibra la forza peso di un certo campione, e si procede a definire una scala lineare di misura, tarata con i multipli e sottomultipli dell'unità.

L'unità di misura della forza è il Newton (N), che però nel Sistema Internazionale (SI) si definisce in maniera dinamica attraverso il Secondo Principio, come grandezza derivata (cioè in dipendenza dalle grandezze fondamentali lunghezza, massa e tempo).

Col dinamometro è possibile provare la legge di composizione delle forze (parallelogramma) in maniera quantitativa. Infatti, collegando tre dinamometri allo stesso punto di applicazione possiamo cambiare intensità e direzione/verso alle tre forze

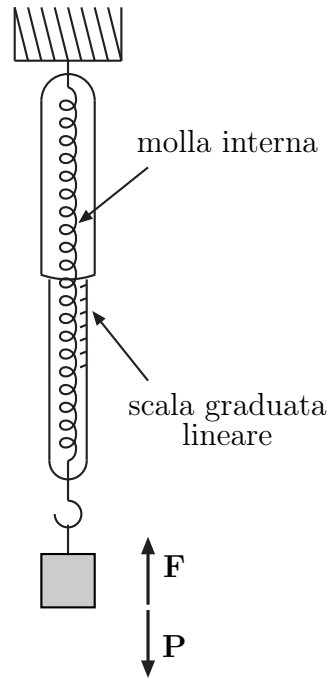


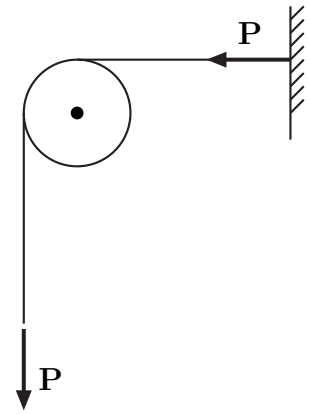
Figura 3.1: Dinamometro.

3.2 Macchine

Per poter fare esperimenti con le forze, cambiare punto di applicazione, direzione, verso e anche intensità usiamo delle macchine.

Le due macchine semplici sono la carrucola e la leva.

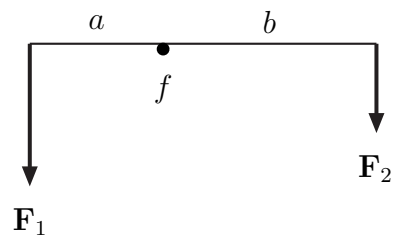
- **Carrucola**: tramite una fune ideale (perfettamente flessibile, senza massa e inestensibile) si comunica in R la forza peso $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ dell'oggetto di massa m appeso all'altra estremità della fune stessa. Quindi la carrucola permette di cambiare direzione, verso e punto di applicazione alla forza $\mathbf{P}$.



- **Leva**: tramite la forza $\mathbf{F_2}$, applicata nel punto A a distanza a dal fulcro f, si fa equilibrio alla forza $\mathbf{F_1} \neq \mathbf{F_2}$, applicata nel punto B a distanza b da f. All'equilibrio si ha che

$$F_2\, b = F_1\, a\,. \tag{3.2}$$

Nel caso per esempio che $b > a$, il modulo della forza $\mathbf{F_2}$ viene "moltiplicato" per il rapporto b/a. Quindi con la leva è possibile fare equilibrio ad una forza più intensa.



3.3 Equilibrio del punto materiale

Consideriamo un punto materiale, cioè un punto geometrico con massa m, soggetto a forze. Non avendo estensione, non ha senso parlare di una sua eventuale rotazione: il punto può solo traslare e non ha moto di rotazione intrinseco).

L'esperienza ci dice che *a due forze applicate nello stesso punto è lecito sostituire, senza alterare lo stato di equilibrio o di non equilibrio del sistema, la loro risultante e vice versa.* Questo è da considerarsi un postulato.

Detto ciò è intuitivo (e si può verificare sperimentalmente) enunciare la seguente legge:

Proposizione 3.3.1 *Condizione necessaria (e sufficiente solo nel caso in cui la velocità iniziale del punto sia nulla) per l'equilibrio di un punto materiale soggetto alle forze* $\mathbf{F}_i$ *è che si abbia*

$$\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0}\,, \tag{3.3}$$

cioè che la risultante delle forze applicate sul punto sia nulla.

La (3.3) è detta *Prima Cardinale* della statica del punto materiale.

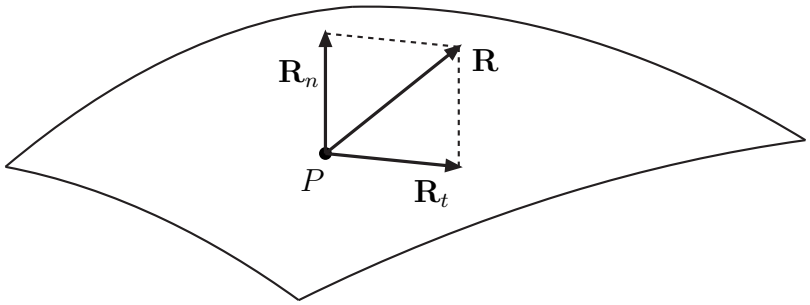
3.4 Vincoli

Un elemento importante nello studio del comportamento meccanico di un sistema è il concetto di *vincolo*.

Definizione 3.4.1 *Si dice vincolo una qualunque limitazione imposta alle configurazioni che può assumere il mio sistema fisico nello spazio.*

Ciò che ci interesa dei vincoli è, ovviamente, il loro comportamento fisico: il vincolo è capace di applicare una forza sul mio sistema, che si dirà *reazione vincolare* (reazione, perché viene in conseguenza all'azione del mio sistema sul vincolo, ma dobbiamo considerare sempre solo il sistema che isoliamo e quindi ci interessa la reazione vincolare). La forza impressa dal vincolo sul sistema è tale da impedire al sistema le configurazioni proibite dal vincolo.

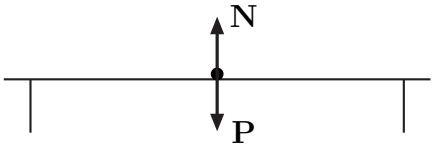
La reazione vincolare $\mathbf{R}$ può essere scomposta in una reazione normale, $\mathbf{R}_n$, ed una tangenziale, $\mathbf{R}_t$.



- Se, in ogni caso, si ha $\mathbf{R}_t = \mathbf{0}$, il vincolo è detto liscio (è capace solo di opporre resistenza normale alla superficie vincolare).
- Se si ha anche una $\mathbf{R}_t \neq \mathbf{0}$, il vincolo è con attrito e $\mathbf{R}_t$ è detta forza di attrito.

3.4.1 Vincoli lisci

Il caso di vincoli lisci è quello più semplice: si ha solo reazione normale. Questa reazione sarà esattamente pari all'azione che il sistema da noi studiato esercita sul vincolo: non può essere inferiore, altrimenti il sistema penetrerà il vincolo stesso, che non si comporterà più come tale; non può essere superiore, altrimenti per l'istante di contatto si avrà una repulsione, da parte del vincolo, sul sistema (questa farebbe schizzare l'oggetto, appoggiato sul vincolo, per aria, contro ogni buon senso). Consideriamo, per esempio, un punto materiale su di un tavolo liscio.



Il punto sarà soggetto alla forza peso $\mathbf{P}$ e alla reazione vincolare $\mathbf{N}$, normale alla superficie del tavolo, tale che

$$\mathbf{N} = -\mathbf{P}\,. \tag{3.4}$$

3.4.2 Vincoli con attrito

Attrito statico

Consideriamo, prima di tutto, *l'attrito radente*, cioè l'attrito che si ha per sfregamento contro una superficie scabra. Il vincolo con attrito sarà un vincolo con $\mathbf{R}_t \neq \mathbf{0}$. Vediamo, allora, come si comporta questa forza, sempre nel caso statico. L'attrito è stato studiato fenomenologicamente da Coulomb. Si vede che:

- Se cerchiamo di mettere in moto il punto facendolo strisciare sul piano scabro, la forza di attrito si oppone alla possibile direzione del moto, ovvero alla forza che imprimiamo sul punto: ha la stessa direzione, verso opposto e stessa intensità.
- Variando l'intensità della forza applicata al punto, ci accorgiamo che c'e' un intervallo di tale intensità per il quale la forza di attrito riesce a contrastare la forza applicata e si ha equilibrio. Superato un certo valore, il corpo si mette in moto.
- Se per esempio consideriamo il caso di un punto materiale (quindi soggetto alla forza di gravità) su un ripiano scabro e cerchiamo di metterlo in moto, ci accorgiamo che anche il peso del corpo gioca un ruolo in questo processo. Se il corpo è più pesante, la forza che dobbiamo applicare per metterlo in moto ha un'intensità maggiore.

Allora, possiamo caratterizzare la forza d'attrito statico, dicendo che tale forza ha stessa direzione e verso contrario alla forza che agisce sul punto. Inoltre finché c'è equilibrio la sua intensità è pari a quella della forza applicata, fino ad un valore limite. Questo comportamento è descritto dalla seguente relazione:

$$\|\mathbf{R}_t\| \leq \mu_s \|\mathbf{R}_n\| \,. \tag{3.5}$$

Il coefficiente μ_s è detto *coefficiente di attrito statico* ed è un numero puro. Raggiunto il valore limite $\|\mathbf{F}_t\| = \mu_s \|\mathbf{R}_n\|$, il punto si mette in moto.

Attrito dinamico

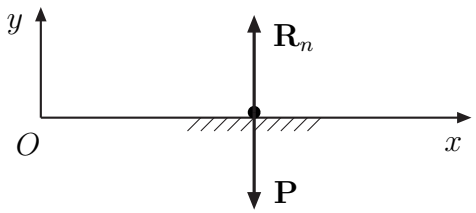
Nel caso dinamico, abbiamo che la forza di attrito si oppone al moto con una forza $\mathbf{R}_t$ tale che abbia la direzione della velocità, verso opposto ad essa e modulo pari a

$$\|\mathbf{R}_t\| = \mu_d \|\mathbf{R}_n\| \,. \tag{3.6}$$

μ_d è detto *coefficiente di attrito dinamico* ed è, in generale, minore di μ_s. Come μ_s, il coefficiente d'attrito dinamico è in buona approssimazione indipendente dall'estensione della superficie di contatto e dipende unicamente dalla natura dei corpi a contatto e dal loro grado di levigatezza.

3.4.3 Esempio

Per illustrare meglio la natura dell'attrito statico consideriamo il seguente esempio. Su un piano scabro ad inclinazione variabile α poniamo un punto materiale di massa m e studiamone l'equilibrio al variare di α.

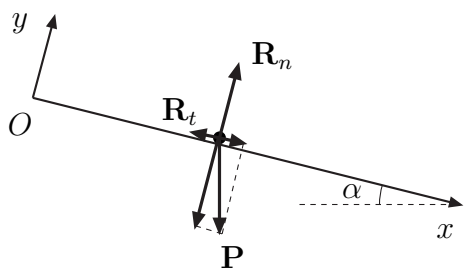


Se $\alpha = 0$, l'unica sollecitazione che riceve il vincolo è lungo la normale alla superficie stessa, quindi non ci sono sforzi tangenziali e si ha semplicemente

$$R_n = mg\,. \tag{3.7}$$

Cominciamo adesso ad aumentare l'inclinazione del piano rispetto all'orizzontale.

Possiamo scomporre le forze nel nostro SdR, lungo i due assi cartesiani. Imponendo l'equilibrio si ha:



$$P\sin\theta - R_t = 0\,, \tag{3.8}$$

$$P\cos\theta - R_n = 0\,. \tag{3.9}$$

Si può avere equilibrio finché $R_t \leq \mu_s R_n$, ovvero, siccome dalla (3.8) si ha $R_t = P\sin\theta$, troviamo la condizione

$$P\sin\theta \leq \mu_s P\cos\theta\,, \tag{3.10}$$

ovvero

$$\tan\theta \leq \mu_s \quad \Longrightarrow \quad \alpha \leq \arctan(\mu_s)\,. \tag{3.11}$$

Se α supera il valore limite $\alpha_0 = \arctan(\mu_s)$, il punto si mette in movimento. Per esempio se $\mu_s \sim 0.2$, risulta $\alpha_0 = 11°$.

Capitolo 4

APPUNTI DI DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

In questo capitolo ci occuperemo delle cause del moto del punto materiale, cioè dello studio della relazione che intercorre fra forze e funzioni cinematiche. La dinamica del punto materiale, come la dinamica di un qualsiasi sistema, è basata sui tre Principi di Newton, che ora brevemente introdurremo e commenteremo.

4.1 Primo Principio della Dinamica

Il Primo Principio della Dinamica è anche detto *Principio d'Inerzia*. L'enunciato di Newton dice che:

Principio 4.1.1 Ogni corpo persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme, se non è soggetto a forze che mutino il suo stato.

Prima di Newton, il Principio d'Inerzia era già stato studiato da Galileo, in netto contrasto con le "credenze" scientifiche del suo tempo, che volevano il movimento di un oggetto legato alla "vis insita movendi", una volta esaurita la quale, il corpo si ferma (a Galileo il merito di aver riconosciuto il carattere accidentale degli attriti). Il principio d'inerzia è importante anche perché permette di introdurre un problema teorico di notevole interesse, quello relativo ad una classe di sistemi di riferimento, nei quali si compiono le misure, che vengono detti *inerziali*. Sono definiti come quella classe di SdR in cui vale esattamente il principio d'inerzia e sono individuati dal fatto che, come vedremo meglio dopo l'enunciato del Secondo Principio di Newton, facendo una trasformazione che somma alla velocità del punto materiale una velocità costante, non cambia la fisica del problema (rimane immutata la seconda legge).

4.2 Secondo Principio della Dinamica

L'enunciato di Newton dice che:

Principio 4.2.1 La mutazione del moto (accelerazione) è proporzionale alla forza motrice impressa e si svolge secondo la linea retta lungo la quale è impressa la forza.

In formule:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}\,, \tag{4.1}$$

con la quale si può risolvere un qualsiasi problema di meccanica!

La (4.1) è un'equazione differenziale del secondo ordine, integrata la quale, con le condizioni iniziali $\mathbf{s}(0) = \mathbf{s}_o$ e $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_o$, si trovano traiettoria ed equazione oraria (cioè si risolve completamente il problema dello studio del moto).

Per integrare la (4.1) abbiamo bisogno di conoscere la struttura della forza, ovvero la funzione

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)\,, \tag{4.2}$$

ovvero come la forza dipende dalla posizione, o dalla velocità (per esempio la forza di attrito viscoso), o anche dal tempo, in maniera esplicita.

Viceversa, conoscendo il moto (cioè la traiettoria e la legge oraria) è possibile risalire alla foma dell'interazione.

Nell'enunciato del Secondo Principio compare la costante m, detta *massa inerziale* del punto a cui è applicata la forza $\mathbf{F}$. La *massa inerziale* è una grandezza estensiva, cioè per un corpo omogeneo si vede che è proporzionale al volume del corpo. Inoltre, la massa di un corpo è da considerarsi una costante (cioè non dipende dal tempo) qualunque sia lo stato di moto del corpo.

4.3 Terzo Principio della Dinamica

L'enunciato di Newton dice che:

Principio 4.3.1 Per ogni azione esiste sempre una reazione uguale e contraria; cosicché le mutue azioni di due corpi sono sempre uguali e di verso opposto.

Si può dire meglio come segue: se un corpo A agisce su un corpo B per mezzo di una forza $\mathbf{F}$, **contemporaneamente** il corpo B agisce su A con -$\mathbf{F}$, tale che il sistema ($\mathbf{F}$, -$\mathbf{F}$) costituisca una coppia di braccio nullo e risultante nulla.

4.4 Relatività galileiana e SdR inerziali

Come abbiamo già accennato nel primo paragrafo, un concetto importante è quello di sistema di riferimento inerziale.

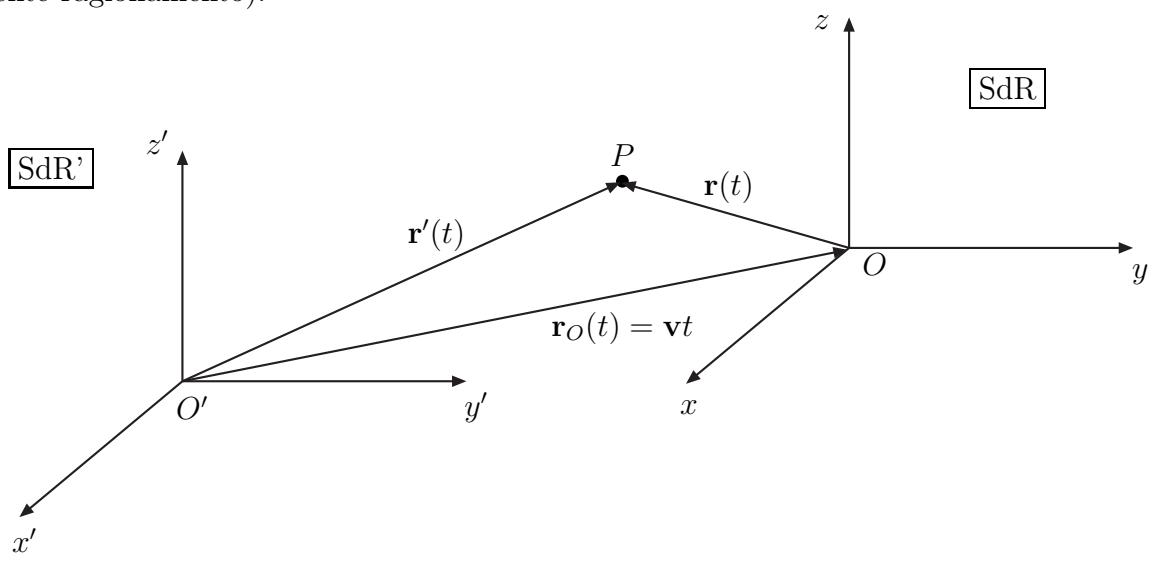
Definizione 4.4.1 *Si dice inerziale un SdR in cui valgano esattamente le leggi di Newton, nella forma in cui le abbiamo esposte. In particolare, si dice inerziale un SdR in cui valga il Principio d'Inerzia.*

Per fare un esempio, consideriamo un punto materiale nello spazio, sufficientemente lontano da altri corpi in modo tale che si possa considerare isolato ($\mathbf{F} = \mathbf{0}$). Noi osservatori saremo in un SdR inerziale se il punto, che non è soggetto a forze, resterà fermo o si muoverà di moto rettilineo uniforme. Supponiamo di aver individuato un tale SdR. Consideriamo, adesso, un'altro SdR che ruoti rispetto a quello inerziale con velocità angolare ω. Se nel SdR inerziale il punto materiale era fermo, adesso, nel nuovo SdR, descriverà un'orbita circolare alla velocità angolare $-\omega$. In questo SdR il punto materiale, non soggetto a forze, si muove di moto circolare

uniforme. È quindi soggetto ad un'accelerazione centripeta che non ha una causa "reale", poiché $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Il SdR così individuato non è inerziale, poiché non vi valgono le leggi di Newton, il principio d'inerzia in testa.

Esistono infiniti SdR inerziali. In particolare, una volta definito un SdR inerziale, qualunque altro sistema di riferimento che si muova di moto traslatorio a velocità costante $\mathbf{v}$ rispetto al primo, sarà anch'esso inerziale.

Prendiamo due sistemi di riferimento, come in figura, e supponiamo che il secondo trasli di velocità costante $\mathbf{v}$ rispetto al primo. Prendiamo per semplicità gli assi del secondo SdR paralleli a quelli del primo (al massimo dovremo fare una trasformazione ortogonale per riportarci a questo caso, ma una tale trasformazione in ogni caso è indipendente dal tempo e non inficia il seguente ragionamento).



Per l'osservatore in SdR', il punto materiale P è individuato dal raggio vettore $\mathbf{r}'(t)$. Per l'osservatore in SdR, invece, da $\mathbf{r}(t)$. La relazione che lega $\mathbf{r}'(t)$ a $\mathbf{r}(t)$ è:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}t\,, \tag{4.3}$$

con $\mathbf{v} = cost$.

Se il punto materiale P si muove di velocità costante in SdR'

$$\dot{\mathbf{r}}' = \mathbf{v}_0 = cost\,, \tag{4.4}$$

allora in SdR si avrà

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}' - \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 - \mathbf{v} = cost\,, \tag{4.5}$$

ovvero, anche in SdR si muove con velocità costante.

Supponiamo adesso che P abbia in SdR' un'accelerazione non nulla, $\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{a}'$. Derivando due volte rispetto al tempo la relazione (4.3) otteniamo

$$\mathbf{a}' = \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{v}) = \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a}\,. \tag{4.6}$$

Quindi, nei due sistemi di riferimento l'accelerazione è la stessa. Se ne deduce che in SdR e SdR' vale il Secondo Principio nella sua forma semplice enunciata da Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. La fisica nei due SdR è la stessa!

Il ragionamento ora fatto si può ripetere infinite volte, per cui potremo affermare che: *Sia S un SdR inerziale: allora è inerziale un qualunque altro SdR che trasli di moto rettilineo uniforme rispetto ad S. Studiare uno stesso fenomeno meccanico in due SdR inerziali, dà gli stessi identici risultati (a meno delle condizioni iniziali).*

La discussione fatta finora può essere riespressa nel modo seguente. Definiamo la classe di trasformazioni (4.3):

Definizione 4.4.2 *Le trasformazioni* $\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}t$ *con* $\mathbf{v} =$ *cost sono dette Trasformazioni di Galileo.*

Allora, la teoria, che è rappresentata dalla legge $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, è invariante sotto trasformazioni di Galileo.

Questa affermazione, che riassume tutto il discorso sui SdR inerziali, è detta *Principio di Relatività Galileiana.*

4.4.1 Massa inerziale, massa gravitazionale e Principio di Equivalenza

Abbiamo definito e caratterizzato la massa inerziale di un corpo. Per renderla una grandezza fisica dobbiamo dare anche un procedimento di misura della grandezza stessa.

Misura dinamica

Per misurare la massa inerziale, possiamo utilizzare lo stesso Secondo Principio. Infatti, sia data la forza costante $\mathbf{F}$. Sottoponiamo due corpi A e B alla stessa forza $\mathbf{F}$ e supponiamo di farli muovere nello stesso modo, ovvero per esempio lungo la stessa direzione e verso della $\mathbf{F}$. Misuriamo i moduli delle accelerazioni $\mathbf{a}_A$ e $\mathbf{a}_B$. Siccome la forza è la stessa, si avrà

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{a_B}{a_A} \,. \tag{4.7}$$

Possiamo allora definire l'unità di massa m_B e musirare in unità m_B la massa m_A

$$m_A = \frac{a_B}{a_A} m_B \,. \tag{4.8}$$

Abbiamo definito una procedura dinamica di misura della massa inerziale. Inoltre, potremo studiare anche le proprietà della massa inerziale, come per esempio il fatto che la massa è uno scalare. Infatti, supponiamo che applicando $\mathbf{F}$ alla massa m_A si misuri l'accelerazione a_A tale che:

$$m_A = \frac{|\mathbf{F}|}{a_A} \,, \tag{4.9}$$

e l'analoga relazione per m_B. Allora, se uniamo i due corpi a formare un corpo unico e vi applichiamo ancora una volta $\mathbf{F}$, misureremo un'accelerazione a_C tale che

$$m_C = \frac{|\mathbf{F}|}{a_C} = \frac{|\mathbf{F}|}{a_A} + \frac{|\mathbf{F}|}{a_B} = m_A + m_B \,. \tag{4.10}$$

Benché in linea di principio una misura dinamica della massa sia possibile, in pratica non è ben realizzabile. In particolare, la precisione che può essere raggiunta non è molto grande e anche la riproducibilità della misura vacilla. Per questo si può cercare di pensare ad una procedura di misura statica.

Misura statica

È un fatto sperimentale che tutti i corpi cadono nel campo di gravità con la stessa accelerazione g. Allora, per il Secondo Principio si avrà:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g}\,, \tag{4.11}$$

dove $\mathbf{P}$ è la forza peso che agisce sull'oggetto di massa m, attraendolo verso il suolo.

Utilizzando una bilancia a due bracci (vedi sezione 3.2), possiamo pensare di misurare in maniera statica la massa. Infatti, poniamo la massa da misurare m su uno dei due bracci e poniamo dei campioni di massa sull'altro, in maniera tale da raggiungere l'equilibrio. Sappiamo allora che all'equilibrio

$$P\,a = P_1\,b\,, \tag{4.12}$$

dove a e b sono i bracci della bilancia. Se costruiamo una bilancia con $a = b$, avremo:

$$P = P_1\,, \quad \text{ovvero} \quad mg = m_1 g\,, \tag{4.13}$$

e dato che g è la stessa per i due corpi, infine

$$m = m_1\,. \tag{4.14}$$

In questo modo si possono raggiungere precisioni ragguardevoli.

Massa inerziale e massa graviazionale

Dietro la relazione (4.14), però, si nasconde un'assunzione che non è per niente scontata e che va definita meglio.

Abbiamo detto che sperimentalmente l'accelerazione g è la stessa per tutti i corpi. Ma come è fatta l'accelerazione di gravità? In effetti, g è legata alla legge di Gravitazione Universale. Supponiamo che due corpi abbiamo "massa" m_A e m_B. Allora i due corpi si attraggono con una forza data da

$$\mathbf{F} = -\mathcal{G}\frac{m_A m_B}{r^2}\hat{\mathrm{u}}_r\,. \tag{4.15}$$

In questo caso la massa del corpo indica una "proprietà attiva", è la *carica* del campo gravitazionale. La chiameremo *massa gravitazionale*. Teoricamente non c'è motivo perché la massa gravitazionale e la massa inerziale debbano coincidere. Indicano due proprietà del corpo diverse e quindi potrebbero essere diverse. La (4.15) è la definizione della forza gravitazionale, ne dà la forma funzionale. Consideriamo allora il corpo B sulla superficie terrestre (nel nostro laboratorio) al Polo Nord[1]. Siccome sarà attratto con una forza data da (4.15), potremo scrivere che questa forza è

$$\mathbf{F} = m_B\left(-\mathcal{G}\frac{m_T}{R_T^2}\hat{\mathrm{u}}_r\right) = m_B\,\mathbf{g} = -m_B g\hat{\mathbf{k}}\,, \tag{4.16}$$

dove m_T e R_T sono la massa e il raggio della Terra e $\hat{\mathbf{k}}$ è il versore della direzione verticale nel mio laboratorio. La (4.16) è esattamente la forza peso definita in (4.11), una volta posto

$$g = \mathcal{G}\frac{m_T}{R_T^2}\,, \tag{4.17}$$

[1] Il motivo di questa scelta sarà chiaro quando faremo la Gravitazione Universale.

che non dipende dal corpo B. Il Secondo Principio ci dice che, indicando con $m_B^{(g)}$) la massa gravitazionale e con $m_B^{(I)}$) la massa inerziale di B

$$m_B^{(I)} a = -m_B^{(g)} g \,, \tag{4.18}$$

nel nostro SdR con asse z positiva verso l'alto. Siccome sperimentalmente $a = g$ per tutti i corpi, ne deriva che per tutti i corpi si ha anche

$$m^{(g)} = m^{(I)} \,. \tag{4.19}$$

Questa relazione deriva quindi dall'esperimento. Attualmente è verificata con una precisione molto spinta, di una parte su 10^{12}.

Quindi, si può misurare la massa gravitazionale nelle stesse unità di misura della massa inerziale.

L'uguaglianza fra massa gravitazionale e inerziale è detto Principio di Equivalenza ed è carico di conseguenze fisiche (relatività di Einstein).

4.4.2 Misura dinamica delle forze

Nel capitolo della statica abbiamo introdotto il concetto di forza, con la sua natura vettoriale e ne abbiamo studiato l'equilibrio. In base a questo abbiamo dedotto una procedura di misura della forza, tramite il dinamometro. Basandosi ora esclusivamente sul secondo principio, possiamo pensare ad un modo dinamico di misurare una forza. Supponiamo, infatti, di studiare un moto e quindi di conoscerne la traiettoria e la legge oraria. La forza, che ne ha provocato il discostamento dalle leggi del moto rettilineo uniforme, potrà essere trovata semplicemente facendo delle derivate. In tal modo potremmo, nota la traiettoria e la legge oraria di un proiettile sparato in aria, trovare la forza d'attrito dovuto all'aria stessa e riconosceremmo la sua dipendenza dalla velocità.

Oppure, come faremo nel capitolo della Gravitazione Universale, dato il moto di un pianeta intorno al Sole potremmo risalire alla forma della forza ed ottenere esattamente la (4.15).

4.4.3 Problema fondamentale della dinamica

Per problema fondamentale della dinamica si intende l'integrazione dell'equazione differenziale $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, una volta conosciuta la struttura di $\mathbf{F}$ e le condizioni iniziali. Siccome si tratta di un'equazione vettoriale si dovrà separare nelle sue componenti. Ne deriva il seguente sistema:

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} F_x(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \,, \tag{4.20}$$

$$\ddot{y} = \frac{1}{m} F_y(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \,, \tag{4.21}$$

$$\ddot{z} = \frac{1}{m} F_z(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \,, \tag{4.22}$$

con le condizioni iniziali

$$x(0) = x_0 \qquad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \,, \tag{4.23}$$

$$y(0) = y_0 \qquad \dot{y}(0) = \dot{y}_0\,, \tag{4.24}$$
$$z(0) = z_0 \qquad \dot{z}(0) = \dot{z}_0\,. \tag{4.25}$$

Dalla teoria delle equazioni differenziali ordinarie, sappiamo che un tale sistema ammette, date le condizioni iniziali (4.23,4.24,4.25), un'unica soluzione. In questo senso la fisica classica è completamente *deterministica*: dati i valori della posizione e della velocità ad un certo istante, che noi abbiamo fatto coincidere con l'origine dei tempi ($t = 0$), sapendo la natura (cioè struttura matematica) delle forze che agiscono sul sistema, c'è un solo moto che soddisfa $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

4.4.4 Forze interne

In meccanica, come in termodinamica, è importantissimo *isolare il sistema*, cioè scegliere e focalizzare l'attenzione sul sistema fisico che si vuole studiare. È utile fare la seguente distinzione fra le forze che agiscono sui punti del sistema in considerazione: si diranno *forze interne* le forze che, applicate a punti del sistema, hanno come reazioni (nel senso del terzo principio) forze ancora applicate a punti del sistema; si diranno *forze esterne* le forze le cui reazioni non sono, invece, applicate ad altri punti del sistema.
Se la risultante ed il momento risultante delle forze esterne sono nulli, il sistema si dice *isolato* (NB. non c'entra niente con l'isolare il sistema di prima).

4.5 Quantità importanti

Diamo adesso alcune definizioni di quantità fisiche, che si riveleranno molto utili nella descrizione della dinamica, soprattutto dei sistemi di punti materiali (e corpo rigido).

4.5.1 Quantità di moto

Dato un puinto materiale di massa m e velovità $\mathbf{v}$ si dice *quantità di moto* del punto materiale il seguente vettore:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}\,. \tag{4.26}$$

Se consideriamo la massa costante, possiamo riformulare il Secondo Principio come

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}\,, \tag{4.27}$$

con $\mathbf{F}$ forza applicata al punto materiale. Se il mio sistema (il punto materiale in questo caso) è isolato, si ha $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ e quindi

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}\,, \tag{4.28}$$

che ha come soluzione

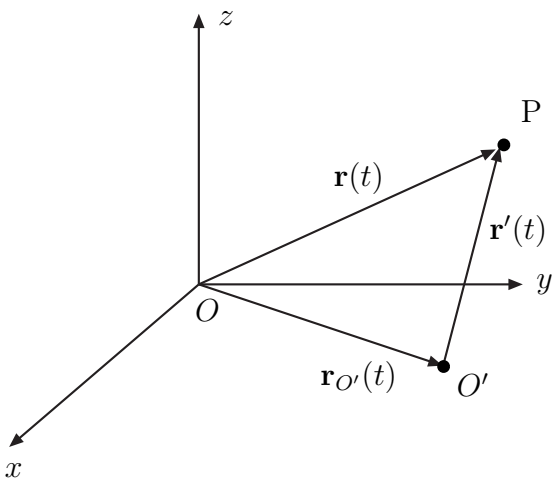
$$\mathbf{p} = cost\,. \tag{4.29}$$

Per sistemi isolati la quantità di moto si conserva (nel caso del punto materiale è una banale conseguenza del fatto che se si annulla la forza, il punto si muove di moto rettilineo uniforme $\mathbf{v} = cost$, quindi, siccome m è costante, si ha anche $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = cost$).

4.5.2 Momento angolare

Dato un arbitrario centro di riduzione O' in un SdR, si dice momento angolare (o momento della quantità di moto) rispetto ad O' il vettore

$$\mathbf{L}_{O'} = (P - O') \wedge \mathbf{p}\,. \tag{4.30}$$



Derivando $\mathbf{L}$ rispetto al tempo, tenendo conto che

$$(P - O') = (P - O) - (O' - O)\,, \tag{4.31}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}}_{O'} &= \mathbf{v} \wedge \mathbf{p} - \mathbf{v}_{O'} \wedge \mathbf{p} + (P - O) \wedge \dot{\mathbf{p}}\,, \\ &= -\mathbf{v}_{O'} \wedge \mathbf{p} + (P - O) \wedge \mathbf{F}\,, \\ &= -\mathbf{v}_{O'} \wedge \mathbf{p} + \mathbf{M}_{O'}\,, \end{aligned} \tag{4.32}$$

dove $\mathbf{M}_{O'}$ è quindi il momento della forza $\mathbf{F}$ rispetto ad O'.

Se il punto O' è fermo nel nostro SdR oppure $\mathbf{v}_{O'} \parallel \mathbf{p}$ allora si ha

$$\dot{\mathbf{L}}_{O'} = \mathbf{M}_{O'}\,. \tag{4.33}$$

Se il sistema è isolato $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ e quindi il momento angolare si conserva:

$$\mathbf{L} = cost\,. \tag{4.34}$$

4.5.3 Impulso

Si parla di impulso di una forza, quando questa agisce per un certo lasso di tempo, breve, sul sistema. L'impulso sarà allora definito come

$$\mathbf{I} = \int_{t_o}^{t} \mathbf{F} dt\,. \tag{4.35}$$

Siccome $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, si ha

$$\mathbf{I} = \int_{t_o}^{t} m\mathbf{a} = m\mathbf{v}(t) - m\mathbf{v}(t_o) = \Delta\mathbf{p}\,, \tag{4.36}$$

cioè

Teorema 4.5.1 *L'impulso di* $\mathbf{F}$ *agente sul punto* P *nel lasso di tempo* $\Delta t = t - t_0$ *è pari alla variazione della quantità di moto fra l'istante in cui comincia e l'istante in cui cessa di agire.*

Gli impulsi entrano in gioco, soprattutto, negli urti, dove si hanno forze intense, applicate però per intervalli di tempo molto brevi.

4.6 Dinamica relativa

In un SdR inerziale sappiamo che è valida la seconda legge di Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, ma se vogliamo applicarla in un SdR non inerziale, S, dobbiamo tener conto del così detto teorema di Coriolis, secondo il quale

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_R + \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_C \,. \tag{4.37}$$

Quindi, in S

$$m\mathbf{a}_R = m\mathbf{a} - m\mathbf{a}_t - m\mathbf{a}_C = \mathbf{F} + \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_C \,, \tag{4.38}$$

dove $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ è la forza realmente e direttamente agente sul punto P, che si registrerebbe nel SdR inerziale; $\mathbf{F}_t = -m\mathbf{a}_t$ e $\mathbf{F}_C = -m\mathbf{a}_C$ sono la forza di trascinamento e la forza di Coriolis, rispettivamente. Queste vengono dette *forze apparenti*, in quanto non si può trovare il corpo che le applica sul punto P. In pratica sono dei termini correttivi, che servono all'osservatore del SdR S, non inerziale, per poter spiegare il moto di P e poter ancora scrivere la seconda legge nella forma

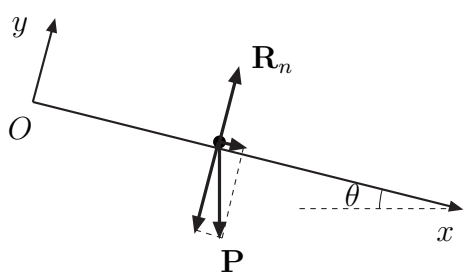
$$\mathbf{\Phi} = m\mathbf{a}_R \,, \tag{4.39}$$

dove adesso però $\mathbf{\Phi} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_C$.

In S si potrà ancora parlare di principio d'inerzia, basterà considerare l'annullarsi di $\mathbf{\Phi}$ e non di $\mathbf{F}$. In poche parole, se io applico a P una forza $\mathbf{F}$ tale che $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_C + m\mathbf{a}_t$, nel SdR S, non inerziale, vedrò P fermo, o muoversi di moto rettilineo ed uniforme (cosa non vera per l'osservatore nel SdR inerziale).

4.7 Esempi

4.7.1 Piano inclinato liscio



Consideriamo un punto materiale di massa m che si muova su un piano inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale sotto l'azione della forza di gravità. Supponiamo che il vincolo (il piano) sia liscio. Ciò vuol dire che l'unica reazione vincolare cui è soggetto il punto materiale è normale alla superficie del vincolo.

Con riferimento alla figura, scegliamo un sistema di riferimento Cartesiano il cui asse x sia lungo la pendenza del piano e l'asse y ovviamente perpendicolare alle x. Il verso positivo dell'asse x sia verso valle e quello dell'asse y verso l'alto. Inoltre supponiamo di far partire il punto da fermo ($\dot{x}(0) = 0$) in $x(0) = x_0$.

Studiamo il moto del punto materiale. Scriviamo l'equazione del moto, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, nel nostro sistema di riferimento. Proiettando l'equazione vettoriale dui due assi cartesiani, otterremo le due equazioni differenziali

$$0 = R_n - P\cos\theta \,, \tag{4.40}$$

$$m\ddot{x} = R\sin\theta \,, \tag{4.41}$$

dove abbiamo considerato il fatto che il moto si svolge solo lungo l'asse delle x (quindi l'accelerazione lungo le y è nulla) e dove

$$P = mg \,. \tag{4.42}$$

L'equazione (4.40) ci dice come si comporta il vincolo:

$$R_n = P\cos\theta = mg\cos\theta\,. \tag{4.43}$$

Ovvero, il vincolo reagisce alla componente normale del peso, $P\cos\theta$, con una reazione vincolare in modulo pari a $P\cos\theta$, con la stessa direzione ma con verso opposto, necessaria per far sì che il punto materiale di muova sul vincolo e non sprofondi in esso.

L'equazione (4.41), invece, ci dà la vera equazione del moto

$$\ddot{x} = g\sin\theta\,. \tag{4.44}$$

Il moto quindi risulta essere un moto uniformemente accelerato con accelerazione costante pari a $g\sin theta$.

Integrando si ottiene la velocità

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(0) + g\sin\theta t \tag{4.45}$$

e infine l'equazione oraria

$$x(t) = x(0) + \dot{x}(0)t + \frac{1}{2}g\sin\theta t^2\,. \tag{4.46}$$

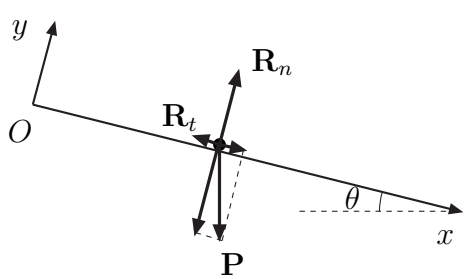
Imponendo le condizioni iniziali

$$x(0) = x_0\,, \tag{4.47}$$
$$\dot{x}(0) = 0\,, \tag{4.48}$$

si ha la soluzione del moto

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{2}g\sin\theta t^2\,. \tag{4.49}$$

4.7.2 Piano inclinato scabro



Consideriamo adesso il caso in cui il piano sia scabro. Fra piano e punto materiale c'è attrito radente. Consideriamo il caso dell'attrito dinamico. La reazione vincolare cui è soggetto il punto materiale non sarà più soltanto normale al piano, ma ci sarà anche una componente tangenziale, che chiameremo R_t e che sarà data (in modulo) da

$$R_t = \mu_d R_n\,, \tag{4.50}$$

dove μ_d è il coefficiente di attrito dinamico.

Con riferimento alla figura, scegliamo lo stesso sistema di riferimento Cartesiano dell'esempio precedente. Avremo

$$0 = R_n - P\cos\theta\,, \tag{4.51}$$
$$m\ddot{x} = R\sin\theta - R_t\,, \tag{4.52}$$

dove, come al solito

$$P = mg\,. \tag{4.53}$$

L'equazione (4.51) ci dà la reazione normale del vincolo

$$R_n = P\cos\theta = mg\cos\theta\,. \tag{4.54}$$

L'equazione (4.41) ci dà il moto

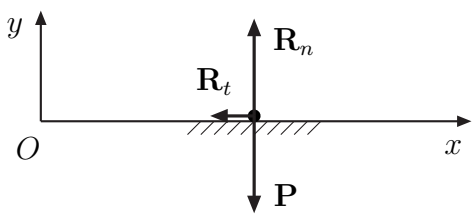
$$m\ddot{x} = mg\sin\theta - \mu_d R_n = mg(\sin\theta - \mu_d\cos\theta)\,, \tag{4.55}$$

quindi, dividendo per m entrambi i lati dell'equazione

$$\ddot{x} = g(\sin\theta - \mu_d\cos\theta)\,, \tag{4.56}$$

che è ancora un moto uniformemente accelerato con accelerazione costante pari a $g(\sin\theta - \mu_d\cos\theta)$.

4.7.3 Piano orizzontale scabro



Consideriamo un punto materiale, di massa m, lanciato con velocità iniziale v_0 su un piano scabro con coefficiente d'attrito μ_d. Studiamo il moto. Scegliamo un sistema di riferimento cartesiano come in figura. Proiettiamo sugli assi l'equazione del moto. Avremo

$$\begin{aligned} 0 &= R_n - P\,, & (4.57)\\ m\ddot{x} &= -F_t\,, & (4.58)\end{aligned}$$

dove $P = mg$ e $F_t = \mu_d R_n$. Risolvendo la (**??**) si ha

$$R_n = P = mg\,, \tag{4.59}$$

e questo ci dice che

$$F_t = \mu_d R_n = \mu_d mg\,. \tag{4.60}$$

Lungo le x, il punto materiale è soggetto ad una forza frenante costante dovuta all'attrito radente col piano. Il moto è di nuovo un moto uniformemente accelerato, con accelerazione

$$\ddot{x} = -\mu_d g\,. \tag{4.61}$$

L'integrale generale sarà dato da

$$x(t) = x(0) + \dot{x}(0)t - \frac{1}{2}\mu_d g t^2\,, \tag{4.62}$$

e imponendo le condizioni iniziali

$$\begin{aligned} x(0) &= 0\,, & (4.63)\\ \dot{x} &= v_0\,, & (4.64)\end{aligned}$$

si ottiene

$$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2}\mu_d g t^2\,. \tag{4.65}$$

Se vogliamo trovare lo spazio di frenata s_f, ovvero lo spazio che percorre il punto materiale finché non si ferma, si può trovare l'istante t_0 in cui ciò avviene imponendo l'annullarsi della velocità

$$\dot{x}(t_0) = v_0 - \mu_d g t_0 = 0\,, \tag{4.66}$$

che dà

$$t_0 = \frac{v_0}{\mu_d g} \tag{4.67}$$

e calcolare lo spazio raggiunto a $t = t_0$

$$s_f = x(t_0) = v_0 t_0 - \frac{1}{2}\mu_d g t_0^2 = \frac{v_0^2}{\mu_d g} - \frac{v_0^2}{2\mu_d g} = \frac{v_0^2}{2\mu_d g}\,. \tag{4.68}$$

Un altro modo per trovare direttamente s_f consiste nell'utilizzare (sostanzialmente) il teorema delle forze vive (che vedremo nel prossimo capitolo). Sappiamo che il punto ha accelerazione costante $a = -\mu_d g$. Si può scrivere

$$a\,dx = \frac{dv}{dt}\frac{dx}{dt}\,dt = \frac{dv}{dt}\,v\,dt = v\,dv\,. \tag{4.69}$$

Integrando la (5.16) fra l'istante iniziale e quello finale si ha

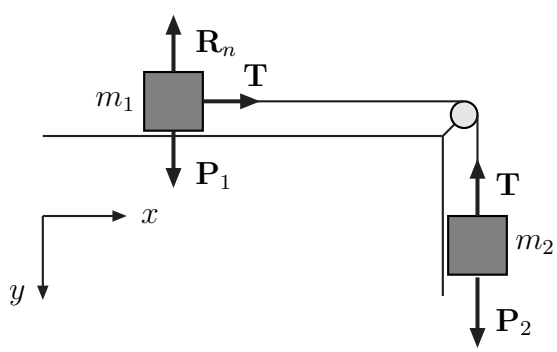
$$\int_0^{s_f} a\,dx = \int_{v_0}^{0} v\,dv\,, \tag{4.70}$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che in $t = 0$ il punto materiale si trova in $x = 0$ e quando si ferma a $t = t_0$ si trova in $x = s_f$, e le corrispettive velocità: v_0 a $t = 0$ e $v = 0$ a $t = t_0$. Si ottiene, quindi

$$a\,s_f = -\frac{v_0^2}{2} \quad \Longrightarrow \quad s_f = -\frac{v_0^2}{2a} \tag{4.71}$$

e considerando l'espressione dell'accelerazione $a = -\mu_d g$, esattamente la (4.68).

4.7.4 Macchina di Flechter



Per "macchina di Flecther" si intende il dispositivo in figura. Un punto materiale di massa m_1 è libero di muoversi su un piano orizzontale liscio. m_1 è collegato ad un altro punto materiale di massa m_2 tramite una fune ideale (ovvero una fune priva di massa, inestensibile). Il punto m_2 si muove nel vuoto, in verticale, sotto l'azione della forza di gravità. La fune collega i due punti passando per una carrucola (che per il momento considereremo priva di massa).

Per studiare il moto del sistema, consideriamo separatamente i due punti materiali.

Sul punto di massa m_2 agisce la forza peso, $\mathbf{P}_2$, e la tensione della fune, $\mathbf{T}$. Se prendiamo l'asse delle y diretta positivamente verso il basso, l'equazione del moto per m_2 sarà data da

$$m_2\ddot{y} = m_2 g - T\,. \tag{4.72}$$

Consideriamo adesso il moto di m_1. Il punto sarà soggetto alla forza peso, $\mathbf{P}_1$ e alla reazione vincolare normale che dovrà annullare l'azione del peso per far sì che m_1 si muova sul piano senza sprofondare. Inoltre, m_1 sarà soggetto alla tensione $\mathbf{T}$ della fune (che non fa altro che comunicare la tensione da un capo all'altro della sua lunghezza). Prendiamo l'asse delle x diretta positivamente verso destra (nel senso del moto). Le equazioni del moto saranno date da

$$0 = R_n - m_1 g\,, \tag{4.73}$$

$$m_1\ddot{x} = T\,. \tag{4.74}$$

Adesso bisogna notare che la variazione di x è esattamente data dalla variazione di y. La fune è insestensibile, quindi di quando si abbassa la quota di m_2 di tanto aumenta la x di m_1. Potremo allora scrivere che

$$\ddot{x} = \ddot{y}\,. \tag{4.75}$$

La soluzione del sistema (4.73,4.74), allora, è possibile con la sostituzione del modulo della tensione T da (4.73) a (4.74). Si ottiene

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} = m_2 g \tag{4.76}$$

e quindi

$$\ddot{x} = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} g\,. \tag{4.77}$$

Il moto è uniformemente accelerato, con accelerazione pari alla (4.77):

$$x(t) = x_0 + \dot{x}_0 t + \frac{1}{2}\frac{m_2}{(m_1 + m_2)} g t^2\,, \tag{4.78}$$

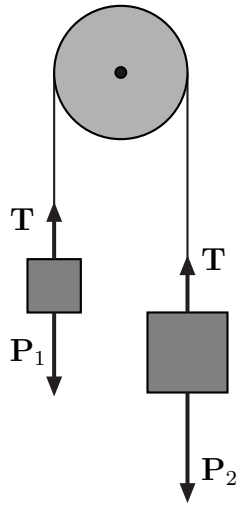
dove le costanti x_0 e $\dot{x}_0$ andranno trovate imponendo le condizioni iniziali.

La tensione della fune è data da

$$T = m_1\ddot{x} = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} g\,, \tag{4.79}$$

ed è quindi costante lungo tutto il moto.

4.7.5 Macchina di Atwood



La "macchina di Atwood" è mostrata in figura. due masse, m_1 e m_2 sono collegate da una fune ideale e "penzolano", ai due capi della fune, appoggiata su una carrucola ideale (priva di massa).

Per studiare il moto del sistema, consideriamo separatamente i due punti materiali.

Sul punto di massa m_1 agirà la forza peso, $\mathbf{P}_1$ e la tensione della fune, $\mathbf{T}$, che viene comunicata direttamente all'altro capo della fune ideale. Prendiamo come coordinata la y, positiva verso il basso. Allora potremo scrivere

$$m_1\ddot{y} = m_1 g - T\,. \tag{4.80}$$

Il secondo punto, m_2, è soggetto anche lui al peso, $\mathbf{P}_2$ e alla tensione della fune $\mathbf{T}$. Questa volta la coordinata y sarà positiva verso l'alto. Siccome la fune è inestensibile, se la massa m_1 si abbassa, la massa m_2 si alzerà, e vice versa. Allora

$$m_2\ddot{y} = T - m_2 g\,. \tag{4.81}$$

Eliminando T dalle due equazioni si ottiene

$$\begin{aligned} T &= m_2\ddot{y} + m_2 g\,, & (4.82)\\ (m_1+m_2)\ddot{y} &= (m_1-m_2)g\,. & (4.83)\end{aligned}$$

Il moto quindi è un moto uniformemente accelerato con accelerazione

$$\ddot{y} = \frac{(m_1-m_2)}{(m_1+m_2)}g\,. \tag{4.84}$$

Se $m_1 > m_2$ l'accelerazione è positiva. Rispetto al SdR scelto, vuol dire che m_1 accelera verso il basso e di conseguenza m_2 verso l'alto. Se $m_2 > m_2$ accade il contrario. Se $m_1 = m_2$ l'accelerazione è nulla. I due punti materiali pesano uguale, le forze si annullano e il moto è uniforme.

Integrando la (4.84) si ha

$$y(t) = y_0 + \dot{y}_0 t + \frac{1}{2}\frac{(m_1-m_2)}{(m_1+m_2)}gt^2\,. \tag{4.85}$$

La tensione della fune è data da

$$T = m_2(\ddot{y}+g) = \frac{2m_1m_2}{(m_1+m_2)}g\,. \tag{4.86}$$

4.8 Attrito viscoso

L'attrito viscoso entra in gioco quando un corpo esteso si muove all'interno di un fluido. L'esperienza ci dice che se la velocità del corpo non è nulla, sul corpo stesso agisce una forza che si oppone al suo moto. Tale forza agisce lungo la direzione della velocità, ha verso opposto e ha un'intensità che dipende da vari fattori. A parità di fluido, l'intensità dipende dalla geometria del corpo in movimento. È esperienza comune che se il corpo ha una superficie che si estende perpendicolarmente al moto, più è estesa tale superficie più è intensa la resistenza che il corpo incontra nel suo moto. Inoltre, tale resistenza dipende dalla natura del fluido che il corpo attraversa. Per esempio se consideriamo il moto in aria, la resistenza incontrata sarà inferiore a quella di un moto in acqua.

Queste considerazioni si riassumono nella seguente forma fenomenologica per la forza che agisce sul corpo che si muove con velocità $\mathbf{v}$ nel fluido:

$$\mathbf{F} = -\beta\mathbf{v}\,, \tag{4.87}$$

dove β è detto *coefficiente d'attrito viscoso*, ha le dimensioni di una forza su una velocità

$$[\beta] = \frac{[F]}{[v]} = \frac{[m][L][t]^{-2}}{[L][t]^{-1}} = \frac{[m]}{[t]}\,, \tag{4.88}$$

e quindi si può dare per esempio in $kg\, s^{-1}$.

Il coefficiente d'attrito viscoso, dipendendo sia dalla geometria del corpo che si muove nel fluido sia dalla natura del fluido, si può esprimere attraverso la relazione seguente:

$$\beta = \gamma\, \eta\,. \tag{4.89}$$

Il coefficiente γ tiene in conto la geometria del corpo, mentre il coefficiente η è detto viscosità del fluido e tiene in conto la natura di quest'ultimo. Per esempio, la viscosità dell'aria in condizioni standard è $\eta = 1.7 \cdot 10^{-6}$ kg m^{-1} s^{-1}. In acqua invece $\eta \sim 10^{-3}$ kg m^{-1} s^{-1}.

Legge di Stokes. Per un corpo sferico di raggio R si ha

$$\gamma = 6\pi R\,, \tag{4.90}$$

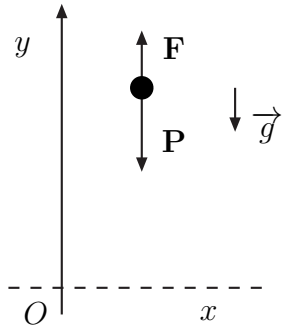
quindi per il moto di una sferetta di raggio R in un fluido di viscosità η si ha

$$\mathbf{F} = -6\pi R\, \eta\, \mathbf{v}\,. \tag{4.91}$$

4.8.1 Caduta di un grave in aria

Consideriamo il caso di un grave (punto materiale di massa m) in caduta libera sotto l'azione della gravità, in aria (invece che nel vuoto). Il grave sarà sottoposto alla forza di gravità e alla forza d'attrito viscoso, che si opporrà al moto.

Se scegliamo un SdR come in figura, in cui l'asse delle y è orientato verso l'alto



potremo scrivere l'equazione del moto come segue:

$$m\ddot{y} = -mg - \beta\dot{y}\,. \tag{4.92}$$

NB. Il segno della forza peso è chiaro (lo abbiamo già discusso precedentemente); il segno della forza d'attrito deve essere anch'esso negativo. Infatti, la forza si deve opporre al moto; se $\dot{y} > 0$, ovvero se nel nostro SdR il punto si sta muovendo verso l'alto, la forza d'attrito deve puntare verso il basso: da qui il segno meno. Allo stesso tempo, se $\dot{y} < 0$, ovvero se nel nostro SdR il punto si sta muovendo verso il basso, la forza deve puntare verso l'alto. Infatti, $-\dot{y}$ sarà positivo e la forza, scritta così, punterà verso l'alto (come deve). La stessa cosa avverrebbe se per esempio prendessimo un SdR con le y positive verso il basso (cambierebbe di segno soltanto la forza peso, che è costante ...).

Dividendo per la massa, si ha

$$\ddot{y} + \frac{\beta}{m}\dot{y} + g = 0\,. \tag{4.93}$$

Per risolvere l'equazione (4.93), notiamo che il termine $y(t)$ è assente. La (4.93) è un'equazione differenziale del secondo ordine, ma ha una forma semplice e in realtà è un'equazione del primo ordine nella velocità. Allora si ha:

$$\dot{y} = v\,, \tag{4.94}$$

$$\dot{v} + \gamma v + g = 0\,, \tag{4.95}$$

dove abbiamo posto $\gamma = \frac{\beta}{m}$. La (4.95) è un'equazione del primo ordine non omogenea. Facciamo il seguente cambio di variabile

$$\xi = v + \frac{g}{\gamma}\,, \tag{4.96}$$

tale che $\dot{\xi} = \dot{v}$. L'equazione diventa

$$\dot{\xi} + \gamma\,\xi = 0\,. \tag{4.97}$$

Risolvendo per separazione di variabili, si ottiene

$$\xi(t) = \xi_0\, e^{-\gamma t} \tag{4.98}$$

e quindi

$$v(t) = \xi_0\, e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma}\,. \tag{4.99}$$

La (4.99) dipende da una costante arbitraria, la ξ_0, che bisognerà trovare imponendo le condizioni iniziali del moto.

Supponiamo di lasciare il grave da una certa altezza h da fermo. Si ha quindi

$$y(0) = h\,, \tag{4.100}$$

$$\dot{y}(0) = 0\,. \tag{4.101}$$

Imponendo la condizione sulla velocità otteniamo

$$v(0) = \xi_0 - \frac{g}{\gamma} = 0\,, \tag{4.102}$$

ovvero

$$\xi_0 = \frac{g}{\gamma}\,. \tag{4.103}$$

La soluzione particolare del moto diventa allora

$$v(t) = \frac{g}{\gamma}\,(e^{-\gamma t} - 1)\,. \tag{4.104}$$

La (4.104) ci descrive il cambiamento della velocità col tempo. A $t = 0$ si ha $v = 0$. come deve essere (lo abbiamo imposto noi). Via via che il tempo scorre, la velocità diventa negativa (il grave si muove verso il basso nel nostro SdR), il termine esponenziale diventa sempre più piccolo e quindi per $t \to \infty$ la velocità tende ad un valore limite

$$v_\infty = -\frac{g}{\gamma}\,. \tag{4.105}$$

Fisicamente, tale limite si può spiegare così: quando il punto è fermo subisce solo la forza di gravità; si mette in moto e, siccome la velocità diventa $\neq 0$, comincia a farsi sentire anche la forza d'attrito. Via via che il corpo cade la velocità aumenta (in modulo) e quindi aumenta

anche la forza d'attrito, che va con v. La differenza fra la forza peso e la forza d'attrito, che divisa per la massa dà l'accelerazione del corpo, diventa sempre più piccola e, per $t \to \infty$, tende a zero. Quindi ad un certo punto (a $t = \infty$) il moto non è più soggetto a forze e quindi diventa un moto rettilineo uniforme, che ha quindi velocità costante.

Possiamo integrare la (4.104) per ottenere $y(t)$:

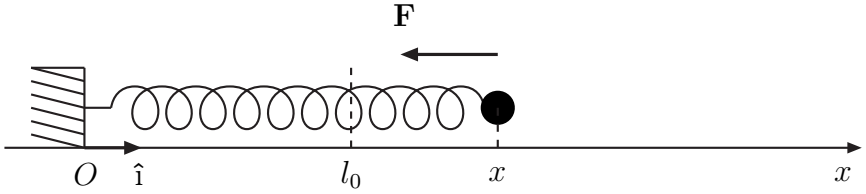
$$y(t) = y(0) + \int_0^t v(t)dt = y(0) + \frac{g}{\gamma}\left(-\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma t} + \frac{1}{\gamma} - t\right) . \tag{4.106}$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = h$ si ha

$$y(t) = h + \frac{g}{\gamma^2}\left(1 - e^{-\gamma t}\right) - \frac{g}{\gamma}\, t\,. \tag{4.107}$$

4.9 Molla ideale e legge di Hooke

Consideriamo un punto materiale di massa m, vincolato a muoversi su un piano liscio e soggetto alla forza di richiamo elastico data da una molla (ideale) come in figura.



La forza $\mathbf{F}$ è data dalla legge di Hooke. Se la molla viene allungata di un tratto $(x - l_0)$ rispetto alla sua posizione di equilibrio l_0, allora la molla applicherà al punto materiale una forza che tenda a riportare il punto nella posizione di equilibrio e che abbia intensità proporzionale all'allungamento. In formule

$$\mathbf{F} = -k(x - l_0)\hat{\imath}\,. \tag{4.108}$$

La costante k è detta *costante elastica* della molla è ha le dimensioni di una forza su una lunghezza

$$[k] = \frac{[F]}{[L]} = \frac{[m]}{[t]^2}\,. \tag{4.109}$$

Quindi k sarà data in $N\,m^{-1}$ o in $kg\,s^{-2}$. l_0 è la lunghezza di riposo della molla.

Scriviamo l'equazione del moto. Il punto materiale sarà soggetto alla forza peso, che sarà compensata dalla reazione normale del vincolo e lungo le x alla forza di richiamo elastico:

$$0 = R_n - mg\,, \tag{4.110}$$

$$m\ddot{x} = -k(x - l_0)\,. \tag{4.111}$$

Quindi l'equazione del moto è

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}(x - l_0) = 0\,. \tag{4.112}$$

Poniamo

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\,, \tag{4.113}$$

e faccaimo un cambio di variabile per riportare l'Eq. (4.112) in forma "canonica":

$$\xi = (x - l_0)\,, \tag{4.114}$$

tale che $\dot{\xi} = \dot{x}$ e $\ddot{\xi} = \ddot{x}$. Allora la (4.112) diventa

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = 0\,, \tag{4.115}$$

equazione del moto armonico.

Possiamo cercare la soluzione generale nella forma

$$\xi(t) = A\cos(\omega t + \phi)\,, \tag{4.116}$$

con l'ampiezza A e lo sfasamento ϕ che dovranno essere fissate imponendo le condizioni iniziali del moto.

Tornando alla variabile x si ha dunque

$$x(t) = l_0 + A\cos(\omega t + \phi)\,. \tag{4.117}$$

Supponiamo di lasciare il punto materiale da fermo nell'origine degli assi. Allora

$$x(0) = 0\,, \tag{4.118}$$
$$\dot{x}(0) = 0\,. \tag{4.119}$$

Le condizioni iniziali si traducono in un sistema per la determinazione di A e ϕ:

$$x(0) = l_o + A\cos\phi = 0\,, \tag{4.120}$$
$$\dot{x}(0) = -A\omega\sin\phi = 0\,, \tag{4.121}$$

ovvero

$$A = -l_0\,, \tag{4.122}$$
$$\phi = 0\,. \tag{4.123}$$

Il moto allora sarà dato dalla

$$x(t) = l_0(1 - \cos(\omega t)\,, \tag{4.124}$$

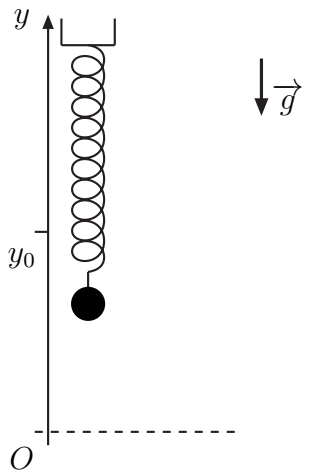
moto armonico di periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,. \tag{4.125}$$

plots ...

4.9.1 Molla con gravità

Cosideriamo adesso un punto materiale di massa m vincolato a muoversi lungo la verticale, soggetto alla forza di gravità oltreché alla forza di richiamo elastico. La situazione è descritta in figura



Prendiamo un sistema di riferimento in cui l'asse delle y è diretta verso l'alto. Se y_0 è il punto di riposo della molla, si avrà per il Secondo Principio

$$m\ddot{y} = -k(y - y_0) - mh\,. \tag{4.126}$$

Riscriviamo l'equazione di moto come

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}\,(y - y_0) - h\,, \tag{4.127}$$

che è un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea.

Come nel paragrafo precedente, possiamo ridefinire la variabile y per riassorbire il termine non omogeneo (che è costante) e riportare l'equazione differenziale a quella dell'oscillatore armonico così come lo abbiamo visto in Eq. (4.115). Poniamo

$$\xi = y - y_0 + \frac{mg}{k}\,. \tag{4.128}$$

Così facendo, Eq. (4.127) diventa

$$\ddot{\xi} + \omega^2\xi = 0\,, \tag{4.129}$$

con $\omega = \sqrt{k/m}$, come nel paragrafo precedente.

Quindi: il moto è sempre un moto armonico, con la stessa pulsazione e periodo. La forza di gravità è una forza costante, quindi non cambia queste caratteristiche del moto. Interviene però nello spostamento del punto di equilibrio. Infatti, la soluzione della (4.129) sarà

$$\xi(t) = A\cos(\omega\,t + \phi \tag{4.130}$$

e, ripassando alla variabile y

$$y(t) = y_0 - \frac{mg}{k} + A\cos(\omega\,t + \phi\,, \tag{4.131}$$

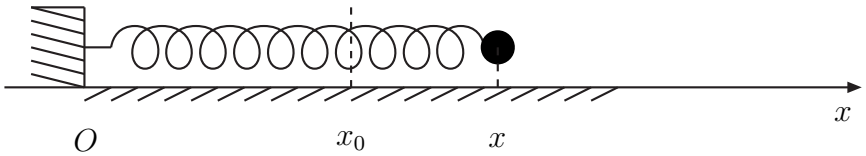
cioè una oscillazione armonica attorno al punto di equilibrio

$$y = y_0 - \frac{mg}{k}\,. \tag{4.132}$$

In assenza di gravità il punto di equilibrio sarebbe semplicemente $y = y_0$. La forza di gravità lo abbassa del termine mg/k.

4.9.2 Molla con attrito radente

Consideriamo un punto materiale di massa m, vincolato a muoversi su un piano scabro con costante d'attrito dinamico μ_d, e soggetto alla forza di richiamo elastico data da una molla (ideale) come in figura.



Il punto è soggetto, quindi, oltre alla forza di richiamo elastico, anche alla forza d'attrito. Siccome il punto è massivo, subisce la forza attrattiva di gravità, in conseguenza della quale il vincolo reagisce con una reazione normale

$$R_n = mg\,. \tag{4.133}$$

La forza d'attrito, avrà quindi un modulo pari a

$$F_t = \mu_d R_n = \mu_d mg\,. \tag{4.134}$$

Il verso della forza d'attrito si oppone al verso della velocità del punto. Allora, potremo scrivere l'equazione di moto nel modo seguente:

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0) - \mu_d mg\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}\,. \tag{4.135}$$

Il termine $\dot{x}/|\dot{x}|$ è un segno, ± 1, che quindi sta ad indicare il fatto che quando $\dot{x} > 0$, cioè quando il punto si muove nerso le x positive, la forza d'attrito si oppone al moto ed è quindi diretta verso l'origine. Vice versa, quando $\dot{x} < 0$, la forza d'attrito è diretta verso le x positive.

La soluzione della (4.135) si ottiene spezzettando il moto in tratti in cui il termine d'attrito ha un segno definito.

Supponiamo di partire con le condizioni iniziali

$$x(0) = x_1 = 0\,, \tag{4.136}$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_1 = 0\,. \tag{4.137}$$

Se m e μ_d sono sufficientemente piccoli non ci dovremo preoccupare di eventuali situazioni di equilibrio. Partendo da $x(0) = 0$, il punto accelererà verso le x positive e arriverà ad un massimo, chiamiamolo $x = x_2$, in cui si fermerà per tornare indietro.

In questo primo semiperiodo, si avrà $\dot{x} > 0$ e quindi l'equazione del moto da risolvere sarà

$$\ddot{x} + \omega^2(x - x_0) + \mu_d g = 0\,, \tag{4.138}$$

dove abbiamo diviso la (4.135) per m e abbiamo considerato il fatto che $\dot{x}/|\dot{x}| = 1$.

Ridefinendo la variabile come

$$\xi = x - x_0 + \frac{\mu_d g}{\omega^2}\,, \tag{4.139}$$

si ha un'equazione del moto armonico in forma "canonica" che ha come soluzione

$$\xi(t) = A\cos(\omega t + \phi)\,. \tag{4.140}$$

Quindi, in termini di $x(t)$

$$x(t) = x_0 - \frac{\mu_d g}{\omega^2} + A\cos(\omega t + \phi)\,. \tag{4.141}$$

Imponendo le condizioni iniziali, si ha

$$\dot{x}(0) = -\omega A \sin\phi = 0 \quad \Longrightarrow \quad \phi = 0\,, \tag{4.142}$$

$$x(0) = x_0 - \frac{\mu_d g}{\omega^2} + A = 0 \quad \Longrightarrow \quad A = -x_0 + \frac{\mu_d g}{\omega^2}\,, \tag{4.143}$$

da cui si ha per $0 < t < \pi/\omega$:

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{\mu_d g}{\omega^2}\right)(1 - \cos(\omega t))\,. \tag{4.144}$$

Cioè il termine d'attrito radente sposta, semplicemente, il "punto di equilibrio" e nella prima parte del moto si ha un moto armonico che si sviluppa intorno al nuovo punto di equilibrio $x_{eq} = x_0 - \mu_d g/\omega^2$. In conseguenza di ciò, l'ampiezza massima a cui può giungere il punto è data da

$$x_2 = x\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = 2\left(x_0 - \frac{\mu_d g}{\omega^2}\right) \tag{4.145}$$

e costituirà il punto iniziale per il successivo moto.

Nel secondo semiperiodo, l'equazione differenziale da risolvere è

$$\ddot{x} + \omega^2(x - x_0) - \mu_d g = 0\,, \tag{4.146}$$

con le condizioni iniziali

$$x\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = 2\left(x_0 - \frac{\mu_d g}{\omega^2}\right)\,, \tag{4.147}$$

$$\dot{x}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = 0\,. \tag{4.148}$$

La soluzione generale è data dalla

$$x(t) = x_0 + \frac{\mu_d g}{\omega^2} + A\cos(\omega t + \phi)\,, \tag{4.149}$$

e imponendo le condizioni iniziali si ha

$$-\omega A \sin\pi + \phi = 0 \quad \Longrightarrow \quad \phi = 0\,, \tag{4.150}$$

$$x_0 + \frac{\mu_d g}{\omega^2} - A = 2x_0 - 2\,\frac{\mu_d g}{\omega^2} \quad \Longrightarrow$$

$$A = -x_0 + 3\,\frac{\mu_d g}{\omega^2}\,. \tag{4.151}$$

In totale, quindi si ha per $\pi/\omega < t < 2\pi/\omega$:

$$x(t) = x_0 + \frac{\mu_d g}{\omega^2} - \left(x_0 - 3\,\frac{\mu_d g}{\omega^2}\right)\cos(\omega t) = 4\,\frac{\mu_d g}{\omega^2} + \left(x_0 - 3\,\frac{\mu_d g}{\omega^2}\right)(1 - \cos(\omega t))\,, \tag{4.152}$$

che è un moto armonico con la stessa pulsazione ma con punto d'equilibrio cambiato e ampiezza cambiata. Il minimo si troverà per $t = 2\pi/\omega$ e varrà

$$x_3 = x\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = 4\,\frac{\mu_d g}{\omega^2}\,. \tag{4.153}$$

Da lì si ricomincia con il moto dato dalla (4.138) con condizioni iniziali

$$x\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = 4\,\frac{\mu_d g}{\omega^2}\,, \tag{4.154}$$

$$\dot{x}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = 0\,. \tag{4.155}$$

La soluzione è, per $2\pi/\omega < t < 3\pi/\omega$:

$$x(t) = x_0 - \frac{\mu_d g}{\omega^2} - \left(x_0 - 5\,\frac{\mu_d g}{\omega^2}\right)\cos(\omega t)\,. \tag{4.156}$$

L'ampiezza massima raggiunta è, questa volta,

$$x_4 = 2\left(x_0 - 3\,\frac{\mu_d g}{\omega^2}\right)\,. \tag{4.157}$$

E cos[1] via ...

In totale, abbiamo un moto sinusoidale i cui minimi e massimi sono dati dalle successioni

$$x_n = x_{n-2} + 4\,\frac{\mu_d g}{\omega^2} \qquad n \text{ dispari}\,, \tag{4.158}$$

$$x_n = x_{n-2} - 4\,\frac{\mu_d g}{\omega^2} \qquad n \text{ pari}\,. \tag{4.159}$$

Gli estremi stanno quindi su due rette: i massimi su una retta decrescente di equazione

$$x(t) = 2x_0 - 2\frac{\mu_d g}{\omega\pi}t\,; \tag{4.160}$$

mentre i minimi stanno sulla

$$x(t) = 2\frac{\mu_d g}{\omega\pi}t\,. \tag{4.161}$$

Quindi il moto è sinusoidale "smorzato", cioè con ampiezza via via decrescente.

Quando l'ampiezza A diventa così piccola che $|kA| < \mu_S R_n$, il punto si ferma per invertire la rotta ma non riparte più e il moto si arresta.

NB: la pulsazione è la stessa del moto senza attrito.

4.9.3 Molla con attrito viscoso

Un comportamento molto diverso si ha nel caso di moto di un punto soggetto ad una forza di richiamo elastico in un mezzo viscoso.

L'equazione del moto sarà data da

$$m\ddot{x} = -\beta\dot{x} - kx\,. \tag{4.162}$$

Ponendo $\beta/m = 2\lambda$ e $k/m = \omega^2$, ci riduciamo alla ricerca di una soluzione della seguente equazione differenziale ordinaria del secondo ordine omogenea:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 = 0\,, \qquad \lambda > 0,\ \omega > 0\,. \tag{4.163}$$

Per risolverla, cerchiamo una soluzione del tipo

$$x(t) \sim e^{\alpha t}\,. \tag{4.164}$$

Sostituendo la (4.164) nella (4.163), e imponendo che la (4.164) sia soluzione, si ottiene un'equazione del secondo ordine per α (detta equazione indiciale)

$$e^{\alpha t}(\alpha^2 + 2\lambda\alpha + \omega^2) = 0 \implies \alpha^2 + 2\lambda\alpha + \omega^2 = 0\,, \tag{4.165}$$

che ha come soluzioni

$$\alpha_\pm = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \Omega^2}\,. \tag{4.166}$$

La soluzione generale allora è:

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{(-\lambda-\sqrt{\lambda^2-\omega^2})t} + Be^{(-\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega^2})t}\,, \\ &= e^{-\lambda t}\left(Ae^{-\sqrt{\lambda^2-\omega^2}t} + Be^{\sqrt{\lambda^2-\omega^2}t}\right)\,. \end{aligned} \tag{4.167}$$

La soluzione generale (4.167) ha caratteristiche diverse a seconda del valore dell'espressione sotto radice. Si hanno i seguenti tre casi: $\lambda^2 - \omega^2 > 0$, $\lambda^2 - \omega^2 = 0$ e $\lambda^2 - \omega^2 < 0$.

- **Oscillatore sovra-smorzato**
- **Smorzamento critico**
- **Moto smorzato**

4.10 Moto Armonico con Attrito Viscoso e Forzante Sinusoidale: Risonanza

Consideriamo il caso in cui al punto materiale collegato ad una molla, di costante elastica k e lunghezza di riposo nulla, viene applicata una forza dipendente dal tempo in maniera sinusoidale. Il moto, inoltre, si svolge in un mezzo che quindi esercita sul punto una forza di tipo "attrito viscoso".

L'equazione del moto sarà data da

$$m\ddot{x} = -\beta\dot{x} - kx + \tilde{A}\cos(\Omega t + p)\,. \tag{4.168}$$

Ponendo $\beta/m = 2\lambda$, $k/m = \omega^2$ e $\tilde{A}/m = A$, ci riduciamo alla ricerca di una soluzione della seguente equazione differenziale ordinaria del secondo ordine non omogenea:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = A\cos(\Omega t + p)\,, \qquad \lambda, \omega, \Omega \in \Re_+ \tag{4.169}$$

La soluzione dell'Eq. (4.169) sarà data dalla somma della soluzione generale dell'omogenea associata, $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = 0$, e di una soluzione particolare. La soluzione dell'omogenea è:

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(A_1 e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega^2}t} + A_2 e^{\sqrt{\lambda^2-\omega^2}t}\right)\,, \tag{4.170}$$

dove le due costanti A_1 e A_2 devono essere fissate imponendo le condizioni iniziali.

Per trovare la soluzione particolare, che la (4.169) è la parte reale della seguente equazione differenziale nei complessi:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = Ae^{i(\Omega t+p)} \,. \tag{4.171}$$

Cerchiamo una soluzione della (4.171) nella forma

$$x_p(t) = be^{i\Omega t} \,, \tag{4.172}$$

dove adesso $b \in \mathfrak{C}$. Si ha

$$\dot{x} = ibe^{i\Omega t} \qquad \ddot{x} = -b\Omega^2 e^{i\Omega t} \,. \tag{4.173}$$

Sostituendo le (4.173) nella (4.171) e imponendo che (4.172) sia soluzione, otteniamo la seguente equazione per b:

$$-b\Omega^2 + i2\lambda\Omega b + \omega^2 b = Ae^{ip} \,, \tag{4.174}$$

dove abbiamo semplificato a destra e a sinistra dell'uguale il termine $e^{i\Omega t}$. Si trova quindi:

$$b = \frac{Ae^{ip}}{\omega^2 - \Omega^2 + i2\lambda\Omega} \,. \tag{4.175}$$

Riscriviamo adesso b come

$$b = Be^{iC} \tag{4.176}$$

con $B, C \in \mathfrak{R}$. Avremo

$$B = \|b\| = \frac{A\|e^{ip}\|}{\|\omega^2 - \Omega^2 + i2\lambda\Omega\|} = \frac{A}{\sqrt{(\omega^2-\Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}} \,, \tag{4.177}$$

$$C = p + \arctan\left(\frac{2\lambda\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}\right) , \tag{4.178}$$

dove abbiamo usato il fatto che se $a, b \in \mathfrak{C}$ allora $\|ab\| = \|a\|\,\|b\|$ e $\|a/b\| = \|a\|/\|b\|$.

Quindi, la soluzione dell'Eq. (4.169) è:

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(A_1 e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega^2}t} + A_2 e^{\sqrt{\lambda^2-\omega^2}t}\right) + \frac{A}{\sqrt{(\omega^2-\Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}} \cos\left(\Omega t + C\right) \tag{4.179}$$

e se prendiamo il caso $\lambda < \omega$ abbiamo:

$$x(t) = Be^{-\lambda t}\cos\left(\omega' t - \phi\right) + \frac{A}{\sqrt{(\omega^2-\Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}} \cos\left(\Omega t + C\right) , \tag{4.180}$$

dove

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} \,. \tag{4.181}$$

Se aspettiamo un tempo sufficientemente lungo, $t \gg 1$, il termine esponenziale diventa piccolo e abbiamo accesso alla parte risonante:

$$x(t) \overset{t\gg 1}{=} \frac{A}{\sqrt{(\omega^2-\Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}} \cos\left(\Omega t + C\right) . \tag{4.182}$$

L'ampiezza della curva (4.182),

$$f(\Omega) = \frac{A}{\sqrt{(\omega^2-\Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}} \,, \tag{4.183}$$

Figura 4.1: Curve di risonanza.

ha la forma mostrata in Fig. 4.1. Per $\lambda \to 0$ il massimo tende all'infinito e la frequenza di risonanza tende a ω. Se $\lambda \neq 0$, la curva ha un massimo per

$$\Omega_R = \sqrt{\omega^2 - 2\lambda^2} = \sqrt{\omega'^2 - \lambda}\,, \tag{4.184}$$

come si puo' vedere annullando la derivata prima:

$$\frac{df}{d\Omega} = 2A\frac{(\omega^2 - \Omega^2 - 2\lambda^2)\Omega}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}} = 0\,, \tag{4.185}$$

che per $\Omega \neq 0$ implica

$$\omega^2 - \Omega^2 - 2\lambda^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Omega^2 = \omega^2 - 2\lambda^2 \tag{4.186}$$

e infine la (4.184).

Studiamo la concavità della $f(\Omega)$ al picco. Si ha:

$$\left.\frac{d^2 f}{d\Omega^2}\right|_{\Omega=\Omega_R} = -\frac{4\lambda^2\Omega_R^2}{(4\lambda^2(\lambda^2 + \Omega_R^2))^{\frac{3}{2}}}(2\lambda^2 + 3\Omega_R^2) < 0\,. \tag{4.187}$$

La frequenza Ω_R è detta frequenza di risonanza. In corrispondenza della risonanza l'ampiezza dell'oscillazione è data da:

$$f(\Omega_R) = \frac{A}{2\lambda\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}} = \frac{A}{2\lambda\omega'}\,. \tag{4.188}$$

Un'altro importante parametro della curva (4.183) è la larghezza a mezza altezza. Per trovarla cerchiamo le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f(\Omega) = \dfrac{A}{2\lambda\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}}\,, \\ f(\Omega) = \dfrac{A}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}\,. \end{cases} \tag{4.189}$$

Si ha:

$$(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2 - 16\lambda^2(\omega^2 - \lambda^2) = 0\,, \tag{4.190}$$

che puo' essere scritta nella forma

$$\xi^2 + 4\lambda^2\xi - 4\lambda^2(3\omega^2 - 4\lambda^2) = 0\,, \tag{4.191}$$

dove abbiamo utilizzato $\xi = \Omega^2 - \omega^2$. Risolvendo l'Eq. (4.191) si ottiene

$$\xi_\pm = -2\lambda^2 \pm 2\lambda\sqrt{3(\omega^2 - \lambda^2)} \tag{4.192}$$

e quindi

$$\Omega_\pm^2 = \omega^2 - 2\lambda^2 \pm 2\sqrt{3}\lambda\sqrt{\omega^2 - \lambda^2} = \Omega_R^2 \pm 2\sqrt{3}\lambda\omega'\,. \tag{4.193}$$

Per trovare Ω dobbiamo estrarre la radice, trovando quindi 4 soluzioni possibili. Imponendo però che Ω sia positivo, le due soluzioni negative vanno scartate e infine si ottiene:

$$\Omega_{\pm} = \sqrt{\omega^2 - 2\lambda^2 \pm 2\sqrt{3}\lambda\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}}\,. \tag{4.194}$$

Per cui:

$$\begin{aligned}
(\Delta\Omega)^2 &= (\Omega_+ - \Omega_-)^2 \\
&= 2(\omega^2 - 2\lambda^2) - 2\sqrt{(\omega^2 - 2\lambda^2)^2 - 12\lambda^2(\omega^2 - \lambda^2)} \\
&= 2(\omega^2 - 2\lambda^2) - 2\sqrt{(\omega^2 - 4\lambda^2)^2 - 8\lambda^2\omega^2} \\
&= 2\left[\Omega_R^2 - \sqrt{(\Omega_R^2 - 2\lambda^2)^2 - 8\lambda^2(\Omega_R^2 + 2\lambda^2)}\right]\,.
\end{aligned} \tag{4.195}$$

Se $\lambda^2 \ll \Omega_R^2$ possiamo espandere l'espressione in Eq. (4.195) ottenendo

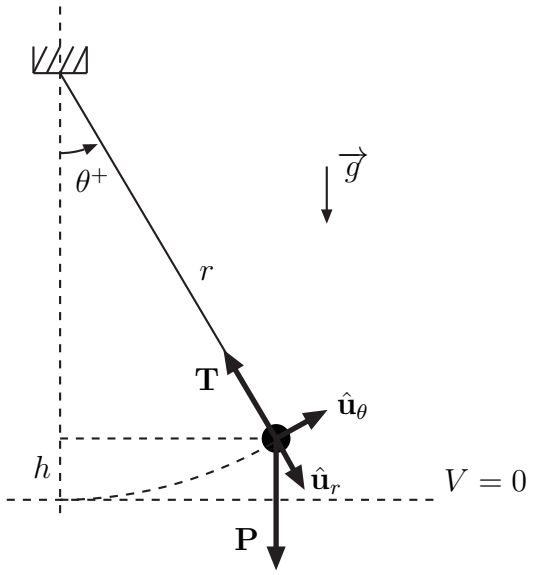
$$(\Delta\Omega)^2 \simeq 12\lambda^2\,, \tag{4.196}$$

e quindi

$$\Delta\Omega \simeq 2\sqrt{3}\lambda\,. \tag{4.197}$$

4.10.1 Pendolo

Consideriamo un punto materiale di massa m appeso ad una corda ideale di lunghezza r, soggetto alla forza di gravità (vedi la figura). Il problema ha un grado di libertà. Infatti, data la lunghezza della corda, che è costante, il punto sarà costretto a muoversi sulla circonfnza di raggio r. Siccome il problema ha simmetria circolare, è conveniente passare alla coordinate polari.



Riscriviamo quindi il Secondo Principio della dinamica scomponendo la parte radiale da quella tangrnziale al moto. Siccome $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{u}}_r$, la velocità e l'accelerazione del punto saranno descritte dai seguenti vettori:

$$\mathbf{v} = r\dot{\theta}\hat{\mathbf{u}}_\theta\,, \tag{4.198}$$

$$\mathbf{a} \;=\; -r\dot{\theta}^2\hat{\mathbf{u}}_r + r\ddot{\theta}\hat{\mathbf{u}}_\theta\,. \tag{4.199}$$

L'equazione del moto diventa quindi

$$\text{(lungo } \hat{\mathbf{u}}_r) \qquad -mr\dot{\theta}^2 = P\cos\theta - T\,, \tag{4.200}$$

$$\text{(lungo } \hat{\mathbf{u}}_\theta) \qquad mr\ddot{\theta} \;= -P\sin\theta\,. \tag{4.201}$$

L'equazione lungo $\hat{\mathbf{u}}_r$ dà la tensione della fune in funzione di θ

$$T = P\cos\theta + mr\dot{\theta}^2\,. \tag{4.202}$$

La seconda equazione invece dà l'equazione del moto vera e propria, dalla quale possiamo trovare $\theta = \theta(t)$:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{r}\sin\theta = 0\,. \tag{4.203}$$

Piccole Oscillazioni

La soluzione esatta della (4.203) esula dallo scopo di questo corso. Però, se consideriamo delle oscillazioni per le quali

$$\theta \ll 1\,, \tag{4.204}$$

dette *piccole oscillazioni*, si può ottenere una soluzione per la (4.203) in approssimazione. Se vale la (4.204), si ha anche (arrestando l'espansione di Taylor al primo ordine)

$$\sin\theta \simeq \theta\,. \tag{4.205}$$

Allora la (4.203) diventa

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{r}\theta = 0\,, \tag{4.206}$$

ovvero l'equazione del moto armonico, in cui

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{r}}\,, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}\,. \tag{4.207}$$

Pendolo di Newton

Notiamo che siamo giunti alla (4.206) utilizzando l'uguaglianza fra massa gravitazionale e massa inerziale. Se avessimo tenuto separate le due, avremmo trovato piuttosto

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{r}\,\frac{m_g}{m_I}\,\theta = 0\,, \tag{4.208}$$

e di conseguenza

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}\,\frac{m_I}{m_g}}\,. \tag{4.209}$$

La misura del periodo in Eq. (4.209) può quindi essere utilizzata per mettere in evidenza eventuali discrepanze dal risultato sperimentale

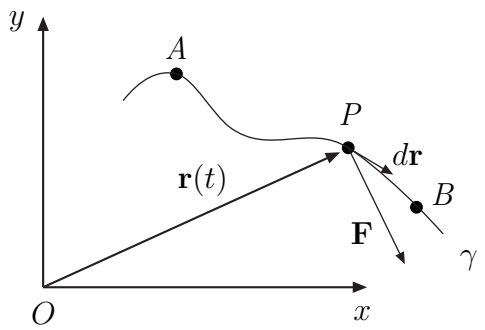
$$\frac{m_I}{m_g} = 1\,. \tag{4.210}$$

Capitolo 5

APPUNTI SU LAVORO ED ENERGIA

5.1 Lavoro ed energia

Definizione 5.1.1 *Dato un punto materiale P, soggetto ad una forza* $\mathbf{F}$ *(se ci sono più forze agenti su P,* $\mathbf{F}$ *è la risultante di tali forze), che si muova lungo una traiettoria* γ*, si dice lavoro compiuto dalla forza* $\mathbf{F}$*, per andare dal punto A al punto B, lo scalare:*



$$L = \int_{A\gamma}^{B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \,. \tag{5.1}$$

Il $d\mathbf{r}$ rappresenta lo spostamento infinitesimo del punto di applicazione di $\mathbf{F}$. In coordinate cartesiane, per esempio, avremo

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} \,, \tag{5.2}$$

per cui si può anche scrivere

$$L = \int_{A\gamma}^{B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{A\gamma}^{B} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \,. \tag{5.3}$$

Il lavoro della forza $\mathbf{F}$ dipende quindi dal cammino γ e dai punti iniziale e finale, A e B. Quindi, in generale, il lavoro infinitesimo $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ non è un differenziale esatto. Per sottolineare ciò, si indica con il seguente simbolo:

$$đL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \,. \tag{5.4}$$

Noto il moto del punto, $(x(t), y(t), z(t))$ e nota la $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$, posso ricondurre l'integrale curvilineo ad un comune integrale definito, tramite la parametrizzazione della traiettoria:

$$L_{AB} = \int_{A\gamma}^{B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_o}^{t_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt \tag{5.5}$$

Il termine

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \tag{5.6}$$

è detto *potenza* della forza $\mathbf{F}$, si indica con W ed indica, quindi, il lavoro compiuto da $\mathbf{F}$ nell'unità di tempo

$$đL = W dt\,. \tag{5.7}$$

Da un punto di vista dimensionale, il lavoro si esprime come segue:

$$[L] = [F]\,[l] = [m]\,[l]\,[t]^{-2}[l] = [m]\,[l]^2[t]^{-2}\,, \tag{5.8}$$

ovvero ha le dimensioni di una massa per una velocità al quadrato.

L'unità di misura che si utilizza per il lavoro nel SI è il *joule*.

Definizione 5.1.2 *Il joule è il lavoro fatto da una forza che sposta il proprio punto di applicazione (parallelamente a sé stessa) per un metro*

$$1\,J = 1\,Nm\,. \tag{5.9}$$

Per la potenza si ha

$$[W] = [L]\,[t]^{-1} = [m]\,[l]^2[t]^{-3}\,. \tag{5.10}$$

L'unità di misura che si utilizza per la potenza nel SI è il *watt*.

Definizione 5.1.3 *Il watt è la potenza di una forza capace di compiere il lavoro di un joule in un secondo*

$$1\,W = 1\,J/s\,. \tag{5.11}$$

È bene sottolineare un'altra volta quanto già asserito implicitamente nelle formule: il lavoro di una forza dipende dal cammino su cui è calcolato. Per esempio, pensiamo al trascinamento di un masso pesante per un certo tratto, in linea retta, sull'asfalto. La forza che noi imprimiamo al masso deve vincere la forza di attrito che c'è fra le due superfici in contatto. Se riusciamo a spostare il masso per un certo numero di metri, avremo fatto in certo lavoro (o meglio, la forza da noi applicata avrà fatto un certo lavoro). Se adesso ripetiamo l'impresa, raddoppiando il numero di metri del trascinamento, il lavoro, fermo restando le condizioni di attrito, sarà raddoppiato anch'esso. Non solo. Potremo ripetere l'esperimento tenendo fissi i punti di partenza e di arrivo del tragitto e variando quest'ultimo, per lunghezza e forma. In tutti questi casi il lavoro sarà diverso, a seconda del cammino su cui ci siamo mossi.

5.2 Teorema delle forze vive

Supponiamo che il punto P sia soggetto alla forza $\mathbf{F}$. Allora, per il secondo principio della dinamica avrà un'accelerazione tale che

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}\,. \tag{5.12}$$

Moltiplichiamola scalarmente a destra e a sinistra per $\mathbf{v}$ la (5.12). Si ottiane la seguente relazione

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = m\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = \frac{d}{dt}\left(m\frac{v^2}{2}\right) \tag{5.13}$$

e ricordando che $đL = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt$, si ha

$$đL = d\left(m\frac{v^2}{2}\right) . \tag{5.14}$$

Il termine

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \tag{5.15}$$

è detto *energia cinetica* del punto materiale P di massa m e velocità $\mathbf{v}$.

Se integriamo lungo la traiettoria γ del punto, otteniamo:

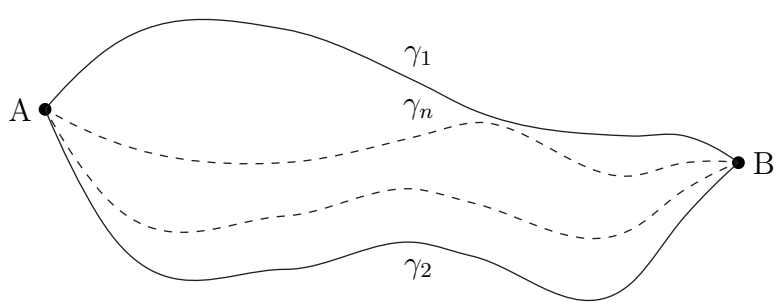
$$L_{AB} = \int_{A\gamma}^{B} đL = \frac{m}{2}\int_{A}^{B} d(v^2) = \frac{m}{2}[v^2(B) - v^2(A)] = T(B) - T(A)\,, \tag{5.16}$$

cioè il lavoro fatto dalla forza $\mathbf{F}$, agente sul punto materiale P, per spostarlo dal punto A al punto B della traiettoria γ, è pari alla variazione di energia cinetica del punto materiale stesso fra il punto A e il punto B. L'espressione (5.16) è il così detto teorema delle forze vive (l'energia cinetica veniva chiamata forza viva).

Dal punto di vista della risoluzione del moto di P, il teorema delle forze vive non ci dice assolutamente nulla. Infatti, per trovare il lavoro che fa $\mathbf{F}$ per andare da A a B, bisogna conoscere già il moto di P. È però un importante risultato, poiché permette di identificare l'omogeneità fra energia cinetica e lavoro e in alcuni casi particolari (vedi forze conservative), dà un integrale primo del moto.

5.3 Forze conservative

Definizione 5.3.1 *Si dice forza conservativa una forza per la quale il lavoro compiuto spostando il punto di applicazione da un punto A ad un punto B non dipende dal cammino scelto, ma soltanto dai due punti, iniziale e finale.*



Con riferimento alla figura, quindi, vale la

$$L_{A\gamma_1 B} = L_{A\gamma_2 B} = ... = L_{A\gamma_n B} \quad \textit{per ogni } \gamma_n \tag{5.17}$$

Inoltre si ha anche la

$$L_{A\gamma B} = -L_{B\gamma A}\,, \tag{5.18}$$

poiché

$$\int_{A\gamma}^{B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{B\gamma}^{A} \mathbf{F} \cdot (-d\mathbf{r}) = -\int_{B\gamma}^{A} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{5.19}$$

Per caratterizzare meglio, da un punto di vista matematico, le forze conservative, diamo una serie di enunciati, equivalenti fra loro.

Condizione necessaria e sufficiente affinché una forza $\mathbf{F}$ sia conservativa è che:

- 1) $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$.

  Infatti, sia $\mathbf{F}$ conservativa. Presi γ_1 e γ_2 due cammini qualsiasi che vanno dal punto A al punto B (come nella figura precedente), si ha che

  $$L_{A\gamma_1 B} = L_{A\gamma_2 B} \quad \Rightarrow \quad L_{A\gamma_1 B} + L_{B\gamma_2 A} = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0\,. \tag{5.20}$$

  Vice versa, se l'integrale ciclico lungo un cammino chiuso è nullo, posso spezzare questo cammino in due, γ_1 e γ_2 ed avere quindi

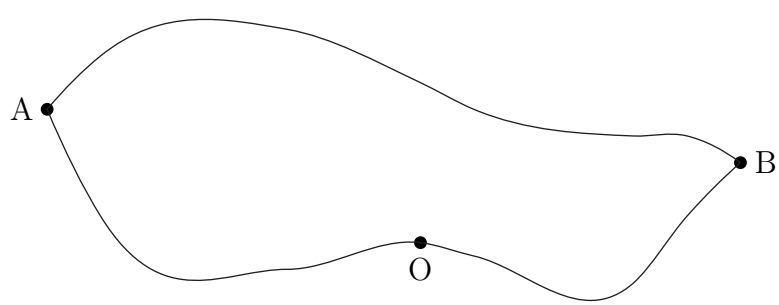
  $$L_{A\gamma_1 B} + L_{B\gamma_2 A} = 0\,, \tag{5.21}$$

  che implica $L_{A\gamma_1 B} = L_{A\gamma_2 B}$, ovvero il fatto che $\mathbf{F}$ è conservativa.

- 2) Esiste una funzione del posto $U(x, y, z)$, tale che

  $$L_{AB} = U(B) - U(A) \tag{5.22}$$

  Infatti, sia $\mathbf{F}$ conservativa. Fissiamo un punto qualsiasi dello spazio, O (come in figura).



Ponendo

$$L_{OA} = \int_{OA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \;=\; U(A)\,, \tag{5.23}$$

$$L_{OB} = \int_{OB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \;=\; U(B)\,, \tag{5.24}$$

si ha che

$$L_{AB} \;=\; \int_{AB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{AO} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{OB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_{OA} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{OB} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \\
&= U(B) - U(A)\,. \qquad (5.25)
\end{aligned}
$$

Il vice versa è banale. Infatti se è valida la (5.25), vuol dire che il lavoro fatto da $\mathbf{F}$ dipende soltanto dai punti A e B e non dal cammino fatto per arrivare dall'uno all'altro.

La funzione $U(x, y, z)$ è detta *Potenziale* della forza $\mathbf{F}$.

- 3) Esiste una funzione del posto $U(x, y, z)$, con $U \in C^2(\Omega)$ cioè continua con derivate continue sul dominio Ω, tale che

$$
\mathbf{F} = \nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}\,. \qquad (5.26)
$$

Infatti, sia $\mathbf{F}$ conservativa. Consideriamo uno spostamento infinitesimo lungo l'asse x, dx. Allora

$$
đL = \mathbf{F}\cdot dx\,\mathbf{i} = F_x dx\,, \qquad (5.27)
$$

ma si ha anche, per il punto 2), che

$$
đL = U(x + dx, y, z) - U(x, y, z)\,. \qquad (5.28)
$$

Quindi

$$
F_x = \frac{U(x + dx, y, z) - U(x, y, z)}{dx} = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad (5.29)
$$

e così per le altre componenti.

Vice versa, se $\mathbf{F} = \nabla U$, si ha che

$$
\begin{aligned}
\int_{A\gamma}^{B} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_{A\gamma}^{B} \nabla U\cdot d\mathbf{r} = \int_{A\gamma}^{B} (\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz) = \int_{A\gamma}^{B} dU\,, \\
&= U(B) - U(A)\,, \qquad (5.30)
\end{aligned}
$$

per ogni γ e quindi $\mathbf{F}$ è conservativa.

- 4) La forza $\mathbf{F}$ è irrotazionale, ovvero $rot\mathbf{F} = \nabla \wedge \mathbf{F} = \mathbf{0}$, dove, per esempio in coordinate cartesiane si ha

$$
rot\mathbf{F} = (\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z})\mathbf{i} + (\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x})\mathbf{j} + (\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y})\mathbf{k}\,. \qquad (5.31)
$$

Sia $\mathbf{F}$ conservativa. Allora si ha $\mathbf{F} = \nabla U$. Sappiamo che $U \in C^2(\Omega)$. Allora, prendendo per esempio la componente z della forza e prendendone la derivata parziale rispeto alla coordinata y, si ha

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}F_z &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \\
&= \text{per il teorema di Schwartz} \\
&= \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}F_y\,. \qquad (5.32)
\end{aligned}
$$

Allora la componente x del rotore si annulla. Così per tutte le componenti del rotore e quindi

$$rot\mathbf{F} = \mathbf{0}\,. \tag{5.33}$$

Vice versa, supponiamo che $\nabla \wedge \mathbf{F} = 0$. Se $\mathbf{F}$ è un campo vettoriale di classe $C^1(\Omega)$ su Ω dominio regolare contenuto in R^3 e S è una superficie regolare con frontiera ∂S vale il teorema di Stokes

$$\int_S \nabla \wedge \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}\,, \tag{5.34}$$

quindi, se $\nabla \wedge \mathbf{F} = \mathbf{0}$, si ha

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0\,, \tag{5.35}$$

che per il punto 1) implica la conservatività di $\mathbf{F}$.

5.4 Forze posizionali

Si dice forza posizionale una forza che dipende solo dalla posizione che il punto materiale P, su cui agisce la $\mathbf{F}$, assume nello spazio:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(P) \tag{5.36}$$

Se in una certa regione dello spazio è definito il vettore $\mathbf{F}$ si dice che vi è un *campo di forza*. Una curva che abbia in ogni suo punto il vettore $\mathbf{F}$ tangente, si dice *linea di forza*.

Per le forze posizionali vale la seguente proposizione: *Una forza conservativa è posizionale*. Il viceversa, invece non vale sempre.

Esermpio di forza posizionale non conservativa

Prendiamo per esempio il seguente campo di forze:

$$\mathbf{F} = \begin{cases} F_x = ax + bz \\ F_y = by \\ F_z = cy \end{cases} \tag{5.37}$$

La forza $\mathbf{F}$ è posizionale, ma non è conservativa. Infatti si ha

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = 0 = \frac{\partial F_y}{\partial x}\,, \tag{5.38}$$

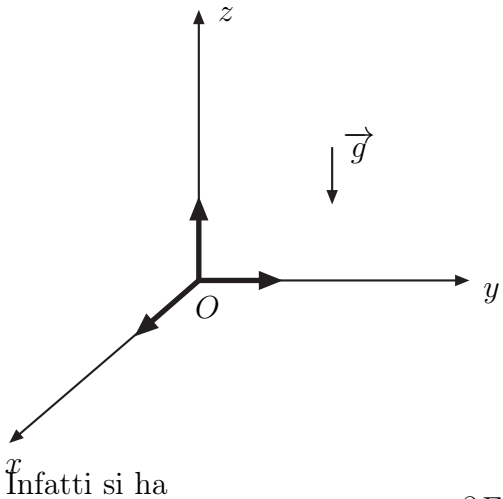
$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = b\,, \tag{5.39}$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial x} = 0 \neq \frac{\partial F_x}{\partial z}\,, \tag{5.40}$$

quindi $\nabla \wedge \mathbf{F} \neq 0$ e $\mathbf{F}$ non è conservativa.

Forza di gravità

Un primo esempio di forza conservativa è la *forza peso*. Il campo corrispondente è uniforme.



Se consideriamo il SdR in figura, in ogni punto di R^3 il campo è definito come

$$\mathbf{g} = -g\,\hat{k}\,. \tag{5.41}$$

Se il punto materiale P ha massa m, su di lui agisce una forza

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} = -mg\,\hat{k}\,, \tag{5.42}$$

quindi le componenti di $\mathbf{F}$ sono

$$F_x = F_y = 0\,, \quad F_z = -mg\,. \tag{5.43}$$

La forza così definita è irrotazionale. Infatti si ha

$$\frac{\partial F_{y,z}}{\partial x} = \frac{\partial F_{x,z}}{\partial y} = \frac{\partial F_{x,y}}{\partial z} = 0\,. \tag{5.44}$$

Calcoliamo il lavoro fatto dalla forza di gravità che sposti il punto di applicazione da un punto A ad un punto B in R^3. Si ha

$$L_{A\gamma B} = \int_{A\gamma}^{B} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{z_A}^{z_B} F_z\,dz = -mg(z_B - z_A)\,. \tag{5.45}$$

La (5.45) si può scrivere come la differenza della funzione del posto

$$U(x,y,z) = -mg\,z\,, \tag{5.46}$$

in B e in A (NB. la (5.46) è scritta così nel SdR in figura, cioè con le z positive verso l'alto):

$$L_{A\gamma B} = U(B) - U(A) = V(A) - V(B)\,, \tag{5.47}$$

dove abbiamo introdotto la funzione *energia potenziale*

$$V(x,y,z) = -\,U(x,y,z) = mg\,z\,, \tag{5.48}$$

tale che

$$\mathbf{F} = -\nabla V\,. \tag{5.49}$$

Le superfici equipotenziali sono date da $V = cost$ e quindi dai piani orizzontali $z = cost$.

Forza elastica

Un altro esempio di forza conservativa è dato dalla *forza elastica*. Prendiamo il caso generale tridimensionale (è una forza centrale):

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r}\,, \tag{5.50}$$

cioè $F_x = -kx$, $F_y = -ky$, $F_z = -kz$. Le derivate miste sono tutte nulle, quindi $\mathbf{F}$ è irrotazionale e quindi conservativa.

L'energia potenziale è data da

$$V(x,y,z) = \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2)\,, \tag{5.51}$$

tale che

$$\mathbf{F} = -\nabla V\,. \tag{5.52}$$

Forza di gravitazione

La forza di *gravitazione universale* è una forza centrale definita come segue:

$$\mathbf{F} = -\gamma \frac{Mm}{r^2}\,\hat{\mathbf{u}}_r\,. \tag{5.53}$$

Quindi, in coordinate cartesiane si ha

$$F_x = -\gamma Mm \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,, \tag{5.54}$$

$$F_y = -\gamma Mm \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,, \tag{5.55}$$

$$F_z = -\gamma Mm \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,. \tag{5.56}$$

La forza così definita è irrotazionale:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = 3\gamma Mm \frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{\partial F_y}{\partial x}\,, \tag{5.57}$$

e così per le altre componenti.

Il lavoro fatto dalla forza per andare da A a B (in R^3) è dato da:

$$L_{A\gamma B} = \int_{a\gamma}^{B} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \tag{5.58}$$

$$= \text{(passiamo in coordinate polari } d\mathbf{r} = dr\,\hat{\mathbf{u}}_r + r\,d\theta\,\hat{\mathbf{u}}_\theta)\,, \tag{5.59}$$

$$= \int \left(-\gamma \frac{Mm}{r^2}\right)\hat{\mathbf{u}}_r\cdot(dr\,\hat{\mathbf{u}}_r + r\,d\theta\,\hat{\mathbf{u}}_\theta)\,, \tag{5.60}$$

$$= -\int_{r_A}^{r_B} \gamma \frac{Mm}{r^2} dr = \gamma Mm\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)\,, \tag{5.61}$$

$$= U(B) - U(A) = V(A) - V(B)\,. \tag{5.62}$$

Quindi l'energia potenziale assume la seguente forma

$$V(r) = -\gamma \frac{Mm}{r}\,, \tag{5.63}$$

tale che $\mathbf{F} = -\nabla V$.

5.5 Conservazione dell'energia meccanica

Noto il risultato del teorema delle forze vive, $L_{AB} = T(B) - T(A)$, dove L_{AB} è il lavoro della forza $\mathbf{F}$ applicata al punto materiale P, di massa m, consideriamo $\mathbf{F}$ conservativa.
Per quanto detto due paragrafi fa, si avrà

$$L_{AB} = U(B) - U(A) \tag{5.64}$$

e quindi sostituendo nella formula del teorema delle forze vive:

$$T(B) - U(B) = T(A) - U(A)\,. \tag{5.65}$$

Questo importante risultato ci dice che se la forza che agisce su P è conservativa, la quantità $(T - U)$, che chiameremo *energia meccanica totale* del punto, si conserva durante il moto. Conviene introdurre l'*energia potenziale* di P, che non è altro che U cambiata di segno:

$$V(x, y, z) = -U(x, y, z)\,, \tag{5.66}$$

con la quale, fra l'altro, $\mathbf{F} = -\nabla V$.

Se conosco l'energia meccanica totale in un certo punto O del moto, $E = T(O) + V(O)$, l'equazione (5.65) mi dice che in ogni altro punto, la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale uguaglierà E:

$$\frac{1}{2}mv^2 + V = E\,. \tag{5.67}$$

L'Equazione (5.67) è un'equazione differenziale del primo ordine (ci sono le velocità), detta equazione della conservazione dell'energia, che descrive il moto di P. È quindi un'equazione che può essere utilizzata nella soluzione di questo. È un'equazione scalare, quindi rimuove un grado di libertà. Per sistemi ad un grado di libertà, quindi, dà la soluzione del moto. Essendo un'equazione del primo ordine, è, in generale, più semplice da integrare. Di qui la grande importanza nella ricerca degli *integrali primi* del moto, ovvero delle quantità che, sotto particolari condizioni, *si conservano* (cioè sono costanti del moto).

5.5.1 Soluzione generale

Prendiamo per esempio un sistema ad un grado di libertà. Nel caso del punto materiale che stiamo studiando, prendiamo il caso in cui la configurazione del punto sia descritta da un parametro x. L'equazione della conservazione dell'energia si può risolvere per quadrature. Si avrà:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = E\,, \tag{5.68}$$

e quindi

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x)\right)}\,, \tag{5.69}$$

e per separazione delle variabili

$$\frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x)\right)}} = dt\,. \tag{5.70}$$

Integrando la (5.70), con le condizioni iniziali che determinano E, si trova la funzione $x(t)$ ovvero l'equazione oraria del punto P.

5.6 Il pendolo

Consideriamo il pendolo in figura 5.1. Il problema è ad un grado di libertà. Inoltre l'unica forza agente sul punto che fa lavoro è la forza peso, che è conservativa (la tensione del filo è sempre perpendicolare allo spostamento e quindi fa lavoro nullo). Quindi, possiamo utilizzare l'equazioni di conservazione dell'energia

$$E = T + V\,, \tag{5.71}$$

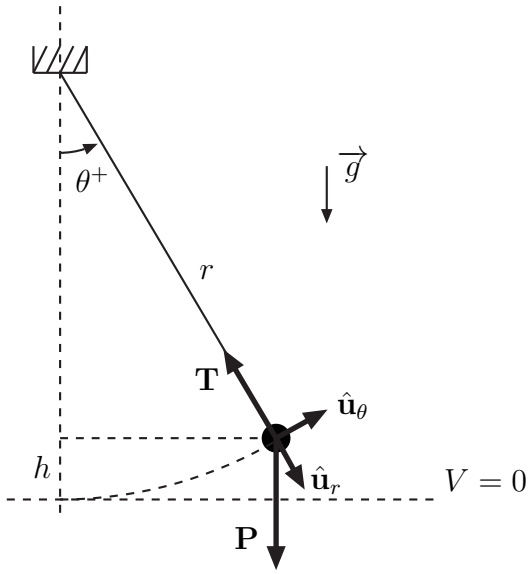


Figura 5.1: Il pendolo.

dove

$$T = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{r}}|^2\,, \tag{5.72}$$

$$V = mgh = mgr(1-\cos\theta)\,. \tag{5.73}$$

In coordinate polari si ha

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{u}}_r\,, \tag{5.74}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{u}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathbf{u}}_\theta = r\dot{\theta}\hat{\mathbf{u}}_\theta\,, \tag{5.75}$$

visto che $\dot{r} = 0$, per cui $|\dot{\mathbf{r}}|^2 = r^2\dot{\theta}^2$. Allora l'equazione della conservazione dell'energia si riscrive come segue

$$\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + mgr(1-\cos\theta) = E\,. \tag{5.76}$$

L'energia meccanica E è da determinarsi sapendo le condizioni iniziali. Supponiamo di lasciare il pendolo a $t = 0$ in $\theta = \theta_0$ da fermo, $\dot{\theta}(0) = 0$. L'energia meccanica iniziale è semplice da calcolare. Infatti, siccome il pendolo viene lasciato da fermo, l'energia cinetica è nulla. Si avrà quindi soltanto energia potenziale

$$E = mgr(1-\cos\theta_0)\,. \tag{5.77}$$

Quindi la (5.76) diventa

$$\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + mgr(\cos\theta_0 - \cos\theta) = 0\,, \tag{5.78}$$

ovvero

$$\dot{\theta}^2 + \frac{2g}{r}(\cos\theta_0 - \cos\theta) = 0\,. \tag{5.79}$$

Per provare che la (5.79) è un integrale primo del moto, deriviamola rispetto al tempo e otteniamo l'equazione del moto del pendolo. Si ottiene

$$0 = 2\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{2g}{r}\dot{\theta}\sin\theta\,,$$

$$= \quad 2\dot{\theta}\left(\ddot{\theta} + \frac{g}{r}\sin\theta\right) , \tag{5.80}$$

e quindi per $\dot{\theta} \neq 0$,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{r}\sin\theta = 0 . \tag{5.81}$$

La soluzione generale della (5.79) è la seguente:

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2g}{r}(\cos\theta - \cos\theta_0)} , \tag{5.82}$$

ovvero

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\pm\sqrt{\frac{2g}{r}(\cos\theta - \cos\theta_0)}} = \int_0^t dt = t . \tag{5.83}$$

Piccole oscillazioni

Se $\theta \ll 1$ si può espandere la (5.79) in serie di Taylor. Tenendo il secondo ordine ($\cos\theta \sim 1 - \theta^2/2$) si ha:

$$\dot{\theta}^2 + \frac{g}{r}(\theta^2 - \theta_0^2) = 0 , \tag{5.84}$$

che integrata dà la

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\pm\sqrt{\frac{g}{r}(\theta_0^2 - \theta^2)}} = t . \tag{5.85}$$

Moltiplicando ambo i membri per $\omega = \sqrt{g/r}$, si ottiene

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\pm\sqrt{(\theta_0^2 - \theta^2)}} = \omega t . \tag{5.86}$$

Siccome

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\pm\sqrt{(\theta_0^2 - \theta^2)}} = \pm\int_1^{\theta/\theta_0} \frac{d\xi}{\pm\sqrt{(1 - \xi^2)}} = \pm\arcsin\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right) , \tag{5.87}$$

si ha

$$\arcsin\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right) = \pm\omega t , \tag{5.88}$$

e quindi

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t) , \tag{5.89}$$

dove abbiamo preso la soluzione positiva in quanto per $t = 0$ abbiamo posto $\theta = \theta_0$ e non $\theta = -\theta_0$.

5.7 Oscillatore armonico

Consideriamo adesso il punto materiale soggetto alla forza elastica di una molla (moto unidimensionale). L'equazione di conservazione dell'energia si esprime come segue:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 , \tag{5.90}$$

da cui

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{k}{m}x^2}\,. \tag{5.91}$$

Quindi la soluzione generale è

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{k}{m}x^2}} = \int_{t_0}^{t} dt = t - t_0\,. \tag{5.92}$$

Supponiamo che a $t = 0$ il punto materiale venga lasciato da fermo ($\dot{x}(0) = 0$) in $x = x_0$. Allora

$$E = \frac{1}{2}kx_0^2\,, \tag{5.93}$$

e l'integrale (5.92) diventa

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\pm\sqrt{x_0^2 - x^2}} = \omega t\,, \tag{5.94}$$

che quindi dà

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t)\,. \tag{5.95}$$

5.7.1 Energia nell'oscillatore armonico

La soluzione generale del moto armonico unidimensionale può essere espressa come

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)\,. \tag{5.96}$$

Cerchiamo l'espressione esplicita dell'energia cinetica e dell'energia potenziale di tale moto. Siccome

$$\dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi)\,, \tag{5.97}$$

si ha

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)\,, \tag{5.98}$$

$$V = \frac{1}{2}k\dot{x}^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi)\,, \tag{5.99}$$

cosicché

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2(\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = cost\,, \tag{5.100}$$

come deve essere.

Quindi, l'energia nel moto armonico oscilla sempre fra la sua forma cinetica e potenziale. Via via che il punto si avvicina all'ampiezza massima x_0, l'energia cinetica si converte in energia potenziale. In $x = x_0$ si ha tutta energia potenziale (il punto è fermo), che poi comincia a riconvertirsi in energia cinetica via via che il punto si riavvicina alla x di equilibrio, $x = 0$. In $x = 0$ si ha tutta energia cinetica (velocità massima, nessuna azione della forza) e poi si ricomincia.

5.8 Teorema delle forze vive forze conservative e forze dissipative

Abbiamo visto che

$$L_{A\gamma B} = T_B - T_A \,. \tag{5.101}$$

D'altra parte

$$L_{A\gamma B} = \int_{A\gamma}^{B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \,. \tag{5.102}$$

Se $\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i$ e tutte le forze sono conservative, si ha la conservazione dell'energia meccanica. Supponiamo, invece, che $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{cons} + \mathbf{F}_d$, cioè che $\mathbf{F}$ sia data dalla somma di una forza conservativa e di una *dissipativa* (non conservativa, per esempio un attrito). Allora

$$\mathbf{F}_{cons} = -\nabla V \tag{5.103}$$

e

$$\int_{A\gamma}^{B} \mathbf{F}_{cons} \cdot d\mathbf{r} = V_A - V_B \,. \tag{5.104}$$

Per $\mathbf{F}_d$ invece l'integrale del lavoro va calcolato. In totale allora avremo

$$L_{A\gamma B} = V_A - V_B + \int_{A\gamma}^{B} \mathbf{F}_d \cdot d\mathbf{r} \,, \tag{5.105}$$

e quindi

$$T_B - T_A = V_A - V_B + \int_{A\gamma}^{B} \mathbf{F}_d \cdot d\mathbf{r} \,, \tag{5.106}$$

o anche

$$(T_B + V_B) - (T_A + V_A) = \int_{A\gamma}^{B} \mathbf{F}_d \cdot d\mathbf{r} \,. \tag{5.107}$$

NB. Scriversi sempre il teorema delle forze vive per esteso, come in (5.106) e poi svolgere l'integrale stando attenti al segno del prodotto scalare (se la forza è dissipativa si oppone al moto e quindi verrà fuori un segno negativo). Solo così si evitano errori di segno nell'applicazione della (5.106).

5.9 Energia potenziale ed equilibrio

L'equazione cardinale della statica asserisce che condizione necessaria e sufficiente affinché un punto materiale inizialmente in quiete, soggetto alle forze $\mathbf{F}_i$ rimanga in quiete è che la risultante sia nulla

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \,. \tag{5.108}$$

Supponiamo, adesso, che tutte le forze $\mathbf{F}_i$ che appaiono nella (5.108) siano conservative. Allora sarà possibile trovare un'energia potenziale, eventualmente somma delle varie energie potenziali delle singole forze, se queste non hanno origine comune, $V(x, y, z)$ tale che

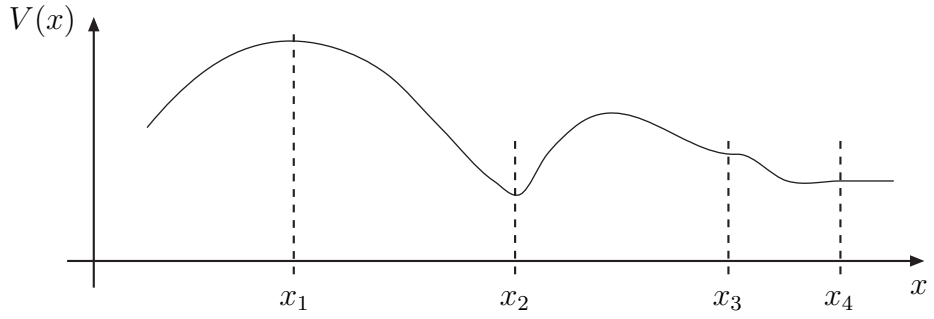
$$\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F} = -\nabla V \,. \tag{5.109}$$

Adesso, $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ se e solo se $\nabla V = \mathbf{0}$. Quindi, *le condizioni di equilibrio vanno ricercate tra quelle configurazioni, compatibili con i vincoli, che rendono stazionaria l'energia potenziale.*

Questo risultato è molto importante, poiché dà uno strumento potente nello studio dell'equilibrio dei sistemi vincolati. Infatti, quando scriviamo l'energia potenziale, automaticamente teniamo conto dei vincoli introducendo l'opportuno numero di parametri indipendenti, atti ad individuare la configurazione del sistema. La differenziazione sarà fatta, allora, rispetto a questi parametri.

Il punto stazionario può essere di massimo, di minimo o di flesso. Nei tre casi cambiano le caratteristiche dell'equilibrio. Si dice di *equilibrio stabile* una configurazione per cui una variazione infinitesima dei gradi di libertà, fa sì che il sistema rimanga in un intorno della configurazione di equilibrio. Per intenderci meglio, consideriamo un punto materiale in equilibrio nel punto più basso di una valle, sotto l'azione della forza peso. Questa è una posizione di equilibrio stabile, perché, se proviamo ad allontanare un po' il punto da questa, non se ne discosterà mai indefinitamente. Se invece mettiamo il punto sulla cima di una collina (il punto di massimo è di equilibrio), questa sarà una configurazione di equilibrio instabile. Infatti allontanatolo un po', se ne discosterà indefinitamente. Anche il flesso è instabile, poiché da una parte si ripete la condizione appena analizzata. La stabilità si ottiene se la derivata seconda dell'energia potenziale è positiva, cioè in corrispondenza dei punti di minimo relativo. Si può avere, infine, anche una situazione di equilibrio indefinito. Ciò avviene in configurazioni in cui non solo la derivata prima si annulla, ma anche le derivate di ordine superiore (per esempio un tratto in cui il potenziale è piatto).

Prendiamo per semplicità un caso unidimensionale $V = V(x)$ e visualizziamo i punti di equilibrio.



Per $x = x_1$ l'energia potenziale ha un massimo e quindi il punto materiale è in un punto di equilibrio instabile. Per $x = x_2$ l'energia potenziale ha un minimo e l'equilibrio è stabile. Per $x = x_3$ si ha un punto di flesso, quindi l'equilibrio è instabile, poiché comunque si sposti il punto materiale, questo andrà a cadere nella buca di potenziale dalla parte di $x > x_3$. Per $x = x_4$ l'equilibrio è indifferente.

Per capire come mai il punto $x = x_1$ è detto di equilibrio *instabile*, consideriamo un piccolo spostamento dalla posizione di equilibrio, e vediamo cosa succede. Se lo spostamento dx è positivo (quindi da x_1 si sposta leggermente il punto materiale verso x_2) la derivata dell'energia potenziale sarà negativa, quindi la forza che agisce sul punto materiale, essendo $F = -\frac{dV}{dx}$ sarà positiva e quindi tenderà ad allontanare ulteriormente il punto materiale da $x = x_1$. Se lo spostamento è negativo, la derivata di $V(x)$ è positiva e quindi la forza è negativa e quindi ancora una volta allontana ulteriormente il punto materiale dalla situazione di equilibrio.

Nel caso dell'equilibrio *stabile* succede l'opposto. Se da $x = x_2$ ci si discosta con un dx positivo (si va verso x_3), la derivata di $V(x)$ è positiva e quindi la forza è negativa e richiama

il punto materiale verso x_2. Analogamente, se il dx è negativo (si va verso x_1) la derivata dell'energia potenziale è negativa e quindi la forza è positiva e richiama il punto verso x_2.

Capitolo 6

APPUNTI SULLA GRAVITAZIONE

La Legge di Grazitazione Universale è uno dei più grandi successi di Newton, che riesce a sintetizzare in una formula matematica le osservazioni sperimentali fatte dai grandi astronomi che lo precedono.

In particolare, si deve sottolineare l'importanza di Copernico che nella prima metà del Cinquecento cambia la prospettiva nella concezione dell'Universo, e le raffinate osservazioni di Tycho Brahe, negli ultimi 20 anni del Cinquecento. Keplero, allievo di Brache, sulla base di queste osservazioni enuncia, nei primi 20 anni del 1600, le sue tre Leggi. Sono Leggi "descrittive", "fenomenologiche", non sono formulate come "leggi fisiche", non costituiscono un modello. Ciò non di meno, sulla base di queste leggi empiriche e del secondo Principio, Newton dà la spiegazione dinamica del movimento dei pianeti intorno al Sole, facendo anche di più, ovvero capendo la portata del suo modello che assurge a Legge Universale, cioè valida anche per fenomeni che non si pensava potessero essere correlati.

6.1 Leggi di Keplero

Prima Legge. I pianeti si muovono intorno al Sole su orbite ellittiche di cui il Sole occupa uno dei fuochi.

Seconda Legge. Il raggio vettore (che unisce il Sole al pianeta durante il suo moto) spazza aree uguali in tempi uguali (la velocità areolare è costante.

Terza Legge. Il rapporto fra il quadrato del periodo di rivoluzione e il cubo del semiasse maggiore dell'ellisse è una costante uguale per tutti i pianeti.

Introduciamo adesso alcuni concetti di cui abbiamo bisogno in seguito e andiamo poi a derivare la Legge di Gravitazione Universale partendo dalle Leggi di Keplero.

6.1.1 Velocità areolare

Dall'analisi è noto che l'area di una superficie piana chiusa, S, si può calcolare con un integrale di linea, esteso alla curva che la delimita. Dato che tale curva è esprimibile, perlomeno a tratti, come $y = y(x)$ o $x = x(y)$, si ha:

$$S = \oint x\,dy = -\oint y\,dx \tag{6.1}$$

e quindi

$$S = \frac{1}{2} \oint (x\, dy - y\, dx) = \frac{1}{2} \oint \parallel \mathbf{r} \wedge d\mathbf{r} \parallel , \tag{6.2}$$

dove $\mathbf{r} = x\hat{ß} + y\hat{æ}$ and $d\mathbf{r} = dx\hat{ß} + dy\hat{æ}$. Essendo $d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}dt = \mathbf{v}dt$, si ha anche

$$S = \frac{1}{2} \oint \parallel \mathbf{r} \wedge \mathbf{v} \parallel dt , \tag{6.3}$$

da cui

$$\dot{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \parallel \mathbf{r} \wedge \mathbf{v} \parallel \ . \tag{6.4}$$

Esprimendo $\mathbf{r}$ in coordinate polari, si ha

$$\mathbf{r} = r\, \hat{\mathbf{u}}_r , \qquad \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{u}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathbf{u}}_\theta , \tag{6.5}$$

e considerando che $\hat{\mathbf{u}}_r \wedge \hat{\mathbf{u}}_r = \mathbf{0}$ e $\hat{\mathbf{u}}_r \wedge \hat{\mathbf{u}}_\theta = \hat{\mathbf{k}}$, si ha

$$\dot{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \hat{\mathbf{k}} , \tag{6.6}$$

ovvero per il modulo:

$$\dot{S} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} . \tag{6.7}$$

6.1.2 Ellisse in coordinate cartesiane

Siano dati due punti nel piano, F_1 e F_2 a distanza $2c$ fra di loro, $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$.

Definizione 6.1.1 *Si dice Ellisse il luogo dei punti P tali che $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ con $a \in \Re_+$ tale che $a > c$.*

F_1 e F_2 sono detti *fuochi* dell'ellisse e c è la distanza focale.

In coordinate cartesiane quindi si ha

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a , \tag{6.8}$$

ovvero, portando una delle radici a dx dell'uguale e quadrando

$$(x+c)^2 + y^2 = (2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 = 4a^2 + (x+c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} . \tag{6.9}$$

Rimettendo a fattore la radice e quadrando di nuovo, si ha

$$a^2(x+c)^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2 + 2ca^2x , \tag{6.10}$$

o anche

$$(a^2 - c^2)\, x^2 + a^2\, y^2 = a^2\, (a^2 - c^2) . \tag{6.11}$$

Poniamo

$$a^2 - c^2 = b^2 \tag{6.12}$$

che è positivo visto che $a > c$. Allora

$$b^2\, x^2 + a^2\, y^2 = a^2 b^2 , \tag{6.13}$$

Figura 6.1: Ellisse in forma canonica relativa agli assi

e dividendo per a^2b^2 si ottiene la forma canonica relativa agli assi dell'ellisse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,. \tag{6.14}$$

Il semiasse a è il maggiore, visto che $b^2 = a^2 - c^2 < a^2$. L'ellisse espressa in Eq. (6.14) è mostrata in Fig. 6.1.

Calcoliamo l'area dell'ellisse. Risolvendo la (6.14) in due rami $y(x) = \pm\sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}$, si trova la superficie per esempio integrando uno dei due rami e moltiplicando per 2. Si ha

$$\begin{aligned}
S &= 2\int_{-a}^{a} y(x)\,dx = 2b\int_{-a}^{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx\,, && (6.15)\\
&= \left|\, x = a\sin\theta\,, \quad dx = a\cos\theta\,d\theta \,\right|\,,\\
&= 2ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta\,, && (6.16)\\
&= \left|\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right|\,,\\
&= \frac{ab}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos x)\,dx = \pi ab\,. && (6.17)
\end{aligned}$$

Il rapporto

$$e = \frac{c}{a} \tag{6.18}$$

è detto *eccentricità* dell'ellisse. Siccome $a > c$ si ha $0 \le e \le 1$. Per $e = 0$ si ha $c = 0$ e quindi l'ellisse degenera in una circonferenza. Per $e \to 1$, invece, $c \to a$ e quindi l'ellisse è sempre più schiacciata e al limite degenera nel segmento che unisce i fuochi.

Ponendo $c = ae$, si ha

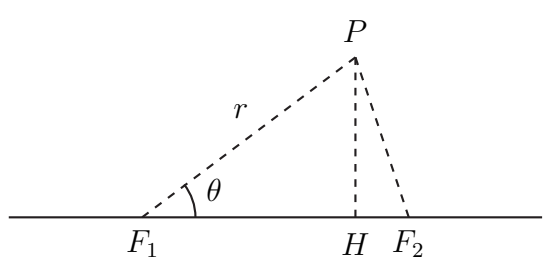
$$b^2 = a^2 - c^2 = a^2(1-e^2) \tag{6.19}$$

e quindi

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1-e^2}\,. \tag{6.20}$$

6.1.3 Ellisse in coordinate polari

Con riferimento alla figura qui di seguito, costruiamo adesso l'equazione dell'ellisse in coordinate polari.



Abbiamo

$$\overline{PF_1}^2 = r^2\,, \tag{6.21}$$

$$\overline{PF_2}^2 = r^2 + (2c)^2 - 2r(2c)\cos\theta\,, \tag{6.22}$$
$$= r^2 + 4c^2 - 4rc\cos\theta\,, \tag{6.23}$$

per cui

$$\sqrt{r^2 + 4c^2 - 4rc\cos\theta} + r = 2a\,. \tag{6.24}$$

Portando r a dx dell'uguale e quadrando, si ha

$$ra(1 - e\cos\theta) = b^2\,, \tag{6.25}$$

dove abbiamo utilizzato le (6.19,6.20). Ponendo $p = b^2/a$, si ha infine

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}\left(1 - e\cos\theta\right)\,, \tag{6.26}$$

equazione dell'ellisse in coordinate polari.

6.2 Da Keplero a Newton

Prima di derivare la Legge di Gravitazione Universale dalle Leggi di Keplero, facciamo alcune considerazioni

- Prendiamo un SdR centrato sul Sole e facciamo l'ipotesi che sia "inerziale". In questo sistema il Sole è fisso e vale il Secondo Principio nella sua forma più semplice, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.
- Il pianeta ed il Sole sono entrambi approssimabili come punti materiali (ottima approssimazione).
- Il moto di un pianeta, sul quale ci concentriamo, non viene perturbato dal moto degli altri pianeti che che girano intorno al Sole. Praticamente considero un sistema Sole-pianeta isolato.

Fatte queste approssimazioni iniziali (che rispecchiano in realtà quello che Brache e Keplero vedevano, con l'accuratezza dell'epoca, passiamo ad analizzare le tre Leggi e vediamo cosa ne possiamo ricavare.

6.2.1 Le orbite sono piane ...

Se le orbite sono piane, vuol dire che $\mathbf{r}$ e $\mathbf{v}$ giacciono sempre sullo stesso piano. Consideriamo il momento angolare del pianeta rispetto al Sole, che coincide col nostro centro del SdR O. Siccome il moto è piano, posso considerare le coordinate polari. Abbiamo

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{r} \wedge m\mathbf{v} = r\hat{\mathbf{u}}_r \wedge m(\dot{r}\hat{\mathbf{u}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathbf{u}}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{k}}\,. \tag{6.27}$$

Siccome $\mathbf{r}$ e $\mathbf{v}$ sono sempre sul piano del moto, $\mathbf{L}_O$ è un vettore con direzione costante.

6.2.2 La velocità areolare è costante ...

Abbiamo visto che

$$\dot{S} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = cost\,. \tag{6.28}$$

Allora $\mathbf{L}_O$ è costante anche in verso e modulo. Quindi è un vettore conservato durante il moto

$$\dot{\mathbf{L}}_O = \mathbf{0}\,. \tag{6.29}$$

Siccome $\dot{\mathbf{L}}_O = \mathbf{M}_0$, dove $\mathbf{M}_0$ è il momento della forza che agisce su P rispetto all'origine O, si ha automaticamente che

$$\dot{\mathbf{L}}_O = \mathbf{0} \implies \mathbf{M}_O = \mathbf{0}\,. \tag{6.30}$$

Essendo

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}\,, \tag{6.31}$$

con $\mathbf{r}, \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$, se ne deduce che $\mathbf{r} \parallel \mathbf{F}$. Cioè il vettore forza gravitazionale è lungo il raggio vettore che unisce il Sole al pianeta.

Un altro modo per vedere la stessa cosa è il seguente. Scriviamo l'accelerazione generica in coordinate polari. Avremo

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\hat{\mathbf{u}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathbf{u}}_\theta\right)\,, & (6.32)\\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{u}}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\mathbf{u}}_\theta\,, & (6.33)\\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{u}}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\hat{\mathbf{u}}_\theta\,. & (6.34) \end{aligned}$$

Siccome $r^2\dot{\theta} = 2\dot{S} = cost$, il pezzo lungo $\hat{\mathbf{u}}_\theta$ si annulla, e quindi

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{u}}_r\,, \tag{6.35}$$

e

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \propto \hat{\mathbf{u}}_r\,. \tag{6.36}$$

6.2.3 Andamento $1/r^2$

Mostriamo che dal fatto che l'orbita è ellittica si trova

$$\|\mathbf{a}\| \propto \frac{1}{r^2}\,. \tag{6.37}$$

Ricordiamo che al momento abbiamo stabilito che

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}\,, \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 - e\cos\theta)\,. \tag{6.38}$$

Per trovare l'accelerazione, per la (6.35) dobbiamo trovare $\ddot{r}$ e $r\dot{\theta}^2$.

Si ha

$$\dot{r} = \dot{\theta}\frac{dr}{d\theta} = \frac{L}{mr^2}\frac{dr}{d\theta}\,. \tag{6.39}$$

Inoltre

$$\frac{d}{d\theta}\frac{1}{r} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d}{dr}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\,, \tag{6.40}$$

da cui

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{L}{m}\frac{d}{d\theta}\frac{1}{r}\,. \tag{6.41}$$

Allora

$$\dot{r} = -\frac{L}{m}\frac{d}{d\theta}\frac{1}{r}\,, \tag{6.42}$$

$$\ddot{r} = \dot{\theta}\frac{d\dot{r}}{d\theta} = \frac{L}{mr^2}\left(-\frac{L}{m}\frac{d^2}{d\theta^2}\frac{1}{r}\right) = -\frac{L^2}{m^2r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\frac{1}{r}\,. \tag{6.43}$$

Considerando l'equazione della traiettoria si ha

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\frac{1}{r} = \frac{d^2}{d\theta^2}\left(-\frac{e}{p}\cos\theta\right) = \frac{e}{p}\cos\theta = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}\,. \tag{6.44}$$

Quindi, in totale

$$a = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{L^2}{m^2r^2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right) - \frac{L^2}{m^2r^2}\frac{1}{r} = -\frac{L^2}{m^2p}\frac{1}{r^2}\,. \tag{6.45}$$

Si ottiene allora che

$$\mathbf{a} = -\frac{L^2}{m^2p}\frac{1}{r^2}\hat{\mathbf{u}}_r \tag{6.46}$$

e

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -\frac{L^2}{mp}\frac{1}{r^2}\hat{\mathbf{u}}_r\,. \tag{6.47}$$

Siccome $L^2/(mp > 0$, si trova che la forza è diretta lungo il raggio, verso il Sole (attrattiva) e che ha un modulo che va come l'inverso del quadrato della distanza del pianeta dal Sole.

6.2.4 Dalla Terza Legge ...

Facciamo vedere adesso che si ha

$$\frac{L^2}{mp} \propto m\,. \tag{6.48}$$

Utilizzando la terza legge otteniamo che

$$\frac{T^2}{a^3} = k\,. \tag{6.49}$$

Essendo la superficie dell'ellisse $S = \pi ab$, e $\dot{S} = cost = (r^2\dot{\theta})/2$, se T è il periodo di rivoluzione del pianeta si ha

$$S = \pi ab = \dot{S}T\,, \tag{6.50}$$

da cui

$$T^2 = \frac{S^2}{\dot{S}^2} = \frac{\pi^2a^2b^2}{\frac{r^4\dot{\theta}^2}{4}} = \frac{4\pi^2m^2a^2b^2}{L^2} \tag{6.51}$$

e

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2m^2}{L^2}\,\frac{b^2}{a} = k\,. \tag{6.52}$$

Ma $b^2/a = p$, per cui

$$\frac{4\pi^2 m^2}{L^2}\, p = k\,, \tag{6.53}$$

da cui infine

$$\frac{L^2}{mp} = \frac{4\pi^2}{k}\, m\,. \tag{6.54}$$

La (6.54) ci dice che

$$\mathbf{F} = -k'\frac{m}{r^2}\hat{\mathbf{u}}_r\,. \tag{6.55}$$

Per considerazioni di simmetria si trova che

$$k' = \gamma M\,, \tag{6.56}$$

dove M è la massa del Sole. Per cui infine si trova la Legge di Gravitazione Universale

$$\mathbf{F} = -\gamma\frac{Mm}{r^2}\hat{\mathbf{u}}_r\,, \tag{6.57}$$

dove γ è la costante di Gravitazione Universale e vale $\gamma = 6.670 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

6.3 Da Newton a Keplero

Consideriamo adesso il problema inverso, ovvero la soluzione del moto di un punto materiale P soggetto ad una forza centrale di tipo gravitazionale. Mettiamoci in un sistema di riferimento centrato nel Sole. Supponiamo che tale sistema di riferimento sia inerziale. In realtà non lo sarà per il fatto che il Sole comunque si muove sotto l'azione della forza di attrazione dovuta al pianeta. Noi però per il momento non considereremo questo moto, rimandando per una trattazione più completa al capitolo **??**.

Quindi, il punto P, di massa m, è soggetto alla forza centrale

$$\mathbf{F} = -\gamma\frac{Mm}{r^2}\hat{\mathbf{u}}_r = \mathbf{E}\, m\,, \tag{6.58}$$

dove abbiamo introdotto il *campo gravitazionale*

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -\gamma\frac{M}{r^2}\hat{\mathbf{u}}_r\,, \tag{6.59}$$

in analogia col campo elettrico. Si può pensare ad $\mathbf{E}$ come al fatto che la massa M modifica le proprietà dello spazio circostante inducendo un campo tale che se poniamo in un certo punto a distanza r dalla massa M una "massa sonda" m, questa viene attratta con forza pari alla (6.58).

La forza (6.58) è conservativa ed ha come energia potenziale la seguente funzione

$$V(r) = -\gamma\frac{Mm}{r}\,, \tag{6.60}$$

tale che

$$\mathbf{F} = -\nabla V\,. \tag{6.61}$$

Siccome la forza è centrale, il suo momento rispetto all'origine del sistema di riferimento (cioè rispetto alla posizione del Sole) è nullo

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F} = \mathbf{0}\,, \tag{6.62}$$

da cui decudiamo subito che

$$\dot{\mathbf{L}}_O = \mathbf{0} \tag{6.63}$$

e quindi che il vettore $\mathbf{L}_O$ si conserva (cioè è costante in modulo direzione e verso durante il moto).

Siccome

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{r} \wedge m\mathbf{v}\,, \tag{6.64}$$

la costanza di $\mathbf{L}_O$ si traduce nel fatto che il moto è un moto piano. Quindi stiamo cercando la soluzione di un problema con 2 gradi di libertà e per ottenerla avremo bisogno di 2 equazioni differenziali scalari.

Capitolo 7

APPUNTI SUI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI

7.1 Prima equazione cardinale e centro di massa

Prendiamo in considerazione un sistema di n punti materiali in un SdR inerziale Σ. Per ogni punto varrà la seconda legge di Newton

$$\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_i \,, \tag{7.1}$$

dove i sta ad indicare l'i-esimo punto ed $\mathbf{F}_i$ è la risultante di tutte le forze che agiscono su questo. Cerchiamo di ricavare qualche informazione utile, sul moto del sistema, da queste n equazioni. Sommiamo su i:

$$\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i m_i \mathbf{a}_i = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{Q}} \,, \tag{7.2}$$

dove $\mathbf{Q}$ è la quantità di moto totale del sistema e $\mathbf{R}$ la risultante delle forze agenti sul sistema. . Conviene, a questo punto, fare una distinzione fra le forze che agiscono sull'i-esimo punto materiale. Ci sono forze che agiscono sul sistema dall'esterno, che chiameremo *forze esterne* e sono quelle le cui reazioni, nel senso del terzo principio, non sono applicate a punti del sistema stesso. Ci sono poi forze, che agiscono sui singoli punti, dovute alle interazioni con gli altri punti del sistema: queste forze verranno chiamate *forze interne* ed avranno reazioni applicate a punti del sistema stesso. Si potrà scrivere, allora:

$$\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{int} + \sum_i \mathbf{F}_i^{ext} = \mathbf{R}^{int} + \mathbf{R}^{ext} \,. \tag{7.3}$$

Per il terzo principio si ha

$$\mathbf{R}^{int} = \sum_i \mathbf{F}_i^{int} = \mathbf{0} \,, \tag{7.4}$$

in quanto le forze interne sono a due a due uguali in modulo e direzione, hanno la stessa retta di applicazione e verso opposto, come in figura 7.1.

Si arriva così alla *Prima Cardinale* della dinamica dei sistemi:

$$\mathbf{R}^{ext} = \sum_i \mathbf{F}_i^{ext} = \dot{\mathbf{Q}} \,. \tag{7.5}$$

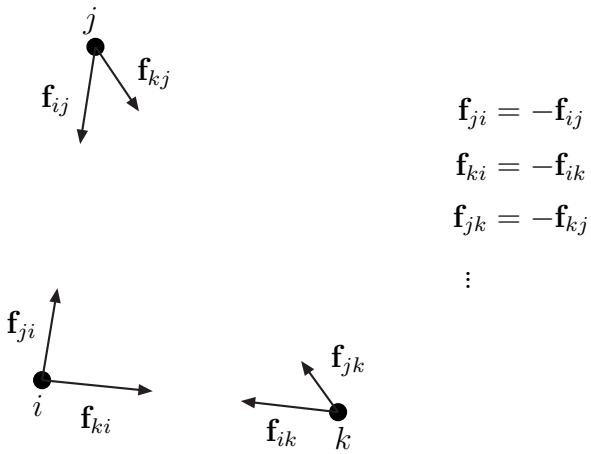


Figura 7.1: Forze interne in un sistema di punti materiali.

È chiaro che la prima cardinale è un'equazione che dà delle informazioni parziali sulla dinamica del sistema studiato. Infatti siamo partiti da n equazioni vettoriali e siamo arrivati ad una sola. In più si sono perse completamente tutte le informazioni relative alle forze interne. L'utilità di una trattazione sì fatta risiede soprattutto nello studio del corpo rigido, per il quale si dimostra che le due cardinali (la seconda sarà derivata nel prossimo paragrafo) sono sufficienti a determinarne univocamente il moto.

Troviamo adesso una forma un po' più comoda della (7.5).

Introduciamo un punto particolare, il *centro di massa* del sistema, individuato dall'equazione

$$(G - O) = \frac{\sum_i m_i (P_i - O)}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i (P_i - O)}{M}\,, \tag{7.6}$$

cioè la media, pesata sulle masse, dei raggi vettore dei singoli punti del sistema. Il centro di massa ha una notevole proprietà: derivando rispetto al tempo la (7.6) si trova:

$$M\mathbf{v}_G = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{Q} \tag{7.7}$$

ovvero, il centro di massa si muove come un punto che abbia la massa totale del sistema e la sua quantità di moto. Derivando ancora rispetto al tempo, si trova la forma della prima cardinale che stavamo cercando:

$$M\mathbf{a}_G = \dot{\mathbf{Q}} = \sum_i \mathbf{F}_i^{ext} = \mathbf{R}^{ext}\,. \tag{7.8}$$

Il centro di massa del sistema è un punto geometrico che riassume le caratteristiche del sistema stesso. Non è necessariamente un punto del sistema.

Se il nostro sistema è un sistema continuo, per trovare il centro di massa, invece di una somma bisognerà fare un integrale

$$(G - O) = \frac{1}{M}\int (P - O)\, dm = \frac{1}{\rho V}\int_V \rho (P - O)\, dV\,. \tag{7.9}$$

Supponendo la densità ρ indipendente dal volume (oggetto omogeneo):

$$(G - O) = \frac{1}{V}\int_V (P - O)\, dV\,. \tag{7.10}$$

7.2 Conservazione della quantità di moto

Supponiamo adesso che il sistema di punti sia isolato (ovvero che non agiscano forze esterne su di esso). Allora

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{ext} = \mathbf{0} \tag{7.11}$$

e quindi

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{Q} = cost\,. \tag{7.12}$$

La quantità di moto del sistema si conserva, ovvero rimangono costanti nel tempo il suo modulo, direzione e verso.

Siccome

$$\mathbf{Q} = M\mathbf{v}_G\,, \tag{7.13}$$

ciò vuol dire che il centro di massa del sistema si muove di moto rettilineo uniforme. In particolare, se a $t = 0$ si ha $\mathbf{v}_G = \mathbf{0}$, allora $\mathbf{v}_G = \mathbf{0}$ sempre, e i punti del sistema si muovono a causa delle interazioni interne in maniera tale da lasciare il loro centro di massa fermo.

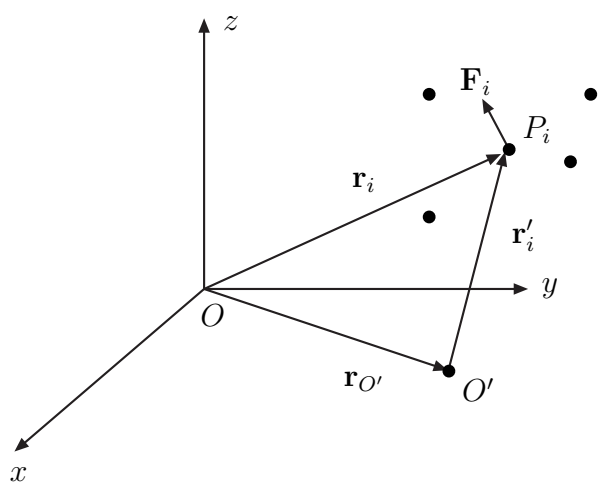
Esempio: il rinculo del cannone

7.3 Seconda equazione cardinale

Riprendiamo in considerazione le n equazioni vettoriali

$$\mathbf{F}_i = m_i\mathbf{a}_i\,, \tag{7.14}$$

Con alcuni accorgimenti ne abbiamo ricavato la prima cardinale, muovendo dal concetto di risultante. Ora partiamo dal concetto di momento risultante $\mathbf{M}_{O'}$ rispetto ad un centro di riduzione O'.



La forza $\mathbf{F}_i$, risultante delle forze applicate al punto materiale P_i, avrà rispetto ad O' un momento dato da

$$\mathbf{M}_{i\,O'} = \mathbf{r}'_i \wedge \mathbf{F}_i = \mathbf{r}'_i \wedge m_i\mathbf{a}_i\,. \tag{7.15}$$

Definiamo il momento risultante come il vettore libero dato dalla somma vettoriale di tutti gli $\mathbf{M}_{i\,O'}$. Allora si ha

$$\mathbf{M}_{O'} = \sum_i \mathbf{M}_{i\,O'} = \sum_i \mathbf{r}'_i \wedge \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{r}'_i \wedge m_i \mathbf{a}_i \,. \tag{7.16}$$

Analogamente, definiamo il momento risultante della quantità di moto rispetto ad O' come il vettore libero somma vettoriale dei singoli momenti angolari:

$$\mathbf{L}_{O'} = \sum_i \mathbf{r}'_i \wedge m_i \mathbf{v}_i \,. \tag{7.17}$$

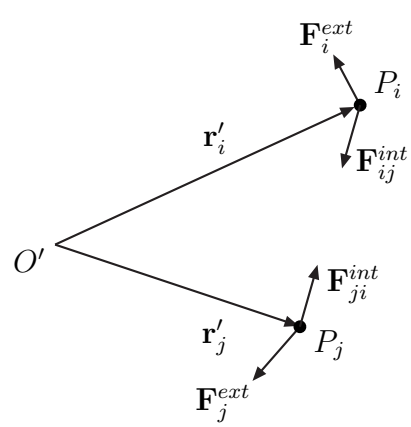
Prendiamo la derivata temporale del vettore $\mathbf{L}_{O'}$. Si avrà

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{L}}_{O'} &= \frac{d}{dt}\sum_i \mathbf{r}'_i \wedge m_i \mathbf{v}_i = \frac{d}{dt}\sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{O'}) \wedge m_i \mathbf{v}_i \,, && (7.18)\\
&= \frac{d}{dt}\sum_i \mathbf{r}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i - \frac{d}{dt}\sum_i \mathbf{r}_{O'} \wedge m_i \mathbf{v}_i \,, && (7.19)\\
&= \sum_i \mathbf{v}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i + \sum_i \mathbf{r}_i \wedge m_i \mathbf{a}_i - \sum_i \mathbf{v}_{O'} \wedge m_i \mathbf{v}_i - \sum_i \mathbf{r}_{O'} \wedge m_i \mathbf{a}_i \,, && (7.20)\\
&= \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{O'}) \wedge m_i \mathbf{a}_i - \sum_i \mathbf{v}_{O'} \wedge m_i \mathbf{v}_i \,, && (7.21)\\
&= \sum_i \mathbf{r}'_i \wedge m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{v}_{O'} \wedge \sum_i m_i \mathbf{v}_i \,, && (7.22)\\
&= \mathbf{M}_{O'} - \mathbf{v}_{O'} \wedge \mathbf{Q} \,, && (7.23)
\end{aligned}$$

dove abbiamo posto $\sum_i \mathbf{v}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, $\sum_i m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{Q}$ e dove abbiamo usato la (7.16). Quindi si ha

$$\mathbf{M}_{O'} = \dot{\mathbf{L}}_{O'} + \mathbf{v}_{O'} \wedge \mathbf{Q} \,. \tag{7.24}$$

Vediamo adesso come possiamo riscrivere il momento risultante $\mathbf{M}_{O'}$. Ogni risultante $\mathbf{F}_i$ agente sul punto i-esimo P_i può essere scomposta come somma di dei seguenti vettori: la risultante delle forze esterne agenti su P_i e le singole forze interne che agiscono quindi fra punto e punto. Prendiamo in considerazione un sistema di due punti, P_i e P_j, come in figura.



La risultante delle forze agenti su P_i è stata scomposta nella somma della risultante delle forze esterne agenti su P_i, $\mathbf{F}_i^{ext}$ e la forza interna che agisce da P_j su P_i, $\mathbf{F}_{ij}^{int}$. Lo stesso è stato fatto per P_j. Per il terzo principio si ha

$$\mathbf{F}_{ij}^{int} = -\mathbf{F}_{ji}^{int} \,. \tag{7.25}$$

Il momento risultante rispetto ad O' lo possiamo scomporre nella somma vettoriale di $\mathbf{M}_{O'}^{ext}$ e $\mathbf{M}_{O'}^{int}$ come segue

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{O'} &= \mathbf{r}'_i \wedge (\mathbf{F}_i^{ext} + \mathbf{F}_{ij}^{int}) + \mathbf{r}'_j \wedge (\mathbf{F}_j^{ext} + \mathbf{F}_{ji}^{int}) \,, && (7.26)\\
&= (\mathbf{r}'_i \wedge \mathbf{F}_i^{ext} + \mathbf{r}'_j \wedge \mathbf{F}_j^{ext}) + (\mathbf{r}'_i \wedge \mathbf{F}_{ij}^{int} + \mathbf{r}'_j \wedge \mathbf{F}_{ji}^{int}) \,, && (7.27)\\
&= \mathbf{M}_{O'}^{ext} + \mathbf{M}_{O'}^{int} \,, && (7.28)
\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{O'}^{ext} &= \mathbf{r}'_i \wedge \mathbf{F}_i^{ext} + \mathbf{r}'_j \wedge \mathbf{F}_j^{ext} \,, && (7.29)\\
\mathbf{M}_{O'}^{int} &= \mathbf{r}'_i \wedge \mathbf{F}_{ij}^{int} + \mathbf{r}'_j \wedge \mathbf{F}_{ji}^{int} \,. && (7.30)
\end{aligned}$$

Prendiamo in considerazione $\mathbf{M}_{O'}^{int}$. Utilizzando la (7.25) si ha

$$\mathbf{M}_{O'}^{int} = \mathbf{r}'_i \wedge \mathbf{F}_{ij}^{int} + \mathbf{r}'_j \wedge \mathbf{F}_{ji}^{int} = (\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j) \wedge \mathbf{F}_{ij}^{int} = \mathbf{0} \,, \tag{7.31}$$

poiché il vettore $(\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j)$ è parallelo a $\mathbf{F}_{ij}^{int}$.

Quindi in realtà $\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_{O'}^{ext}$. Ciò vale per un qualsiasi sistema di punti, in quanto si può sempre scomporre la i-esima risultante in $\mathbf{F}_i^{ext}$ e la somma di tutte le altre forze agenti fra P_i e P_j qualunque sia $j \neq i$.

Allora la seconda cardinale dei sistemi di punti materiali si esprime con la seguente relazione

$$\mathbf{M}_{O'}^{ext} = \dot{\mathbf{L}}_{O'} + \mathbf{v}_{O'} \wedge \mathbf{Q} \,. \tag{7.32}$$

Il secondo vettore della parte di destra è nullo se:

1. O' coincide col centro di massa del sistema, $O' = G$. Siccome $\mathbf{Q} = M\mathbf{v}_G$, nel caso $O' = G$ si ha
$$\mathbf{v}_{O'} \wedge \mathbf{Q} = \mathbf{v}_G \wedge M\mathbf{v}_G = \mathbf{0} \,. \tag{7.33}$$

2. O' è fermo, quindi $\mathbf{v}_{O'} = \mathbf{0}$.

3. anche se $\mathbf{v}_{O'} \neq \mathbf{0}$, si ha $\mathbf{v}_{O'} \parallel \mathbf{v}_G$.

In uno di questi casi, la seconda cardinale si riduce alla forma più semplice

$$\mathbf{M}_{O'}^{ext} = \dot{\mathbf{L}}_{O'} \,. \tag{7.34}$$

7.4 Forza peso e baricentro

Il campo di gravità è caratterizzato dall'essere costante e con $\mathbf{P}$ sempre rivolto verso il basso. Prendendo un SdR con l'asse z rivolto verso l'alto, avremo

$$\mathbf{P}_i = -m_i g \hat{\mathbf{k}} \,. \tag{7.35}$$

Vediamo in questo particolare campo come si scrivono le cardinali della dinamica.

Per la prima cardinale si avrà

$$\mathbf{R}^{ext} = \sum_i \mathbf{P}_i = -\sum_i m_i g \hat{\mathbf{k}} = -(\sum_i m_i) g \hat{\mathbf{k}} = -Mg\hat{\mathbf{k}} \,. \tag{7.36}$$

La risultante delle forze peso è un vettore che agisce su un punto di massa $M = \sum_i m_i$ pari alla massa totale del sistema. Siccome per la prima cardinale dei sistemi si ha

$$\mathbf{R}^{ext} = M\mathbf{a}_G \,, \tag{7.37}$$

ne deriva che

$$-Mg\hat{\mathbf{k}} = M\mathbf{a}_G \,, \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{a}_G = -g\hat{\mathbf{k}} \,, \tag{7.38}$$

cioè il centro di massa del sistema si muove come un punto materiale di massa M soggetto alla forza peso.

Vediamo adesso cosa possiamo dire della seconda cardinale. Prendiamo i momenti rispetto al centro del SdR inerziale O, che è quindi fermo. Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O &= \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{P}_i = -\sum_i \mathbf{r}_i \wedge m_i g\hat{\mathbf{k}} && (7.39)\\ &= -\sum_i m_i \mathbf{r}_i \wedge g\hat{\mathbf{k}} = -M\mathbf{r}_G \wedge g\hat{\mathbf{k}} && (7.40)\\ &= \mathbf{r}_G \wedge (-Mg\hat{\mathbf{k}}) = \mathbf{r}_G \wedge \mathbf{R}^{ext} \,, && (7.41) \end{aligned}$$

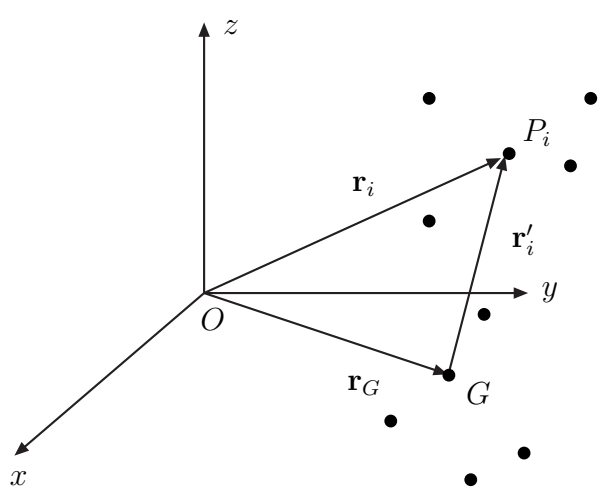
dove abbiamo usato la definizione di centro di massa

$$\mathbf{r}_G = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M} \,. \tag{7.42}$$

La (7.41) ci dice che il momento risultante è pari al momento della risultante applicata al centro di massa del sistema.

7.5 Teorema di König per il momento angolare

Si consideri un sistema di punti materiali con G centro di massa e P_i i-esimo punto materiale. Siano i raggi vettore come in figura.



Si ha:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_G + \mathbf{r}'_i \tag{7.43}$$

e quindi

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_G + \mathbf{v}'_i \tag{7.44}$$

Troviamo l'espressione del momento angolare rispetto ad O:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_O &= \sum_i \mathbf{r}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i = \sum_i (\mathbf{r}_G + \mathbf{r}'_i) \wedge m_i (\mathbf{v}_G + \mathbf{v}'_i)\,, \\ &= \sum_i \mathbf{r}_G \wedge m_i \mathbf{v}_G + \sum_i \mathbf{r}_G \wedge m_i \mathbf{v}'_i + \sum_i \mathbf{r}'_i \wedge m_i \mathbf{v}_G + \sum_i \mathbf{r}'_i \wedge m_i \mathbf{v}'_i\,. \end{aligned} \tag{7.45}$$

Analizziamo i quattro termini della (7.45).

1. Il primo è il momento angolare di un punto, il centro di massa, che abbia tutta la massa del sistema. Infatti

$$\sum_i \mathbf{r}_G \wedge m_i \mathbf{v}_G = \mathbf{r}_G \wedge \sum_i m_i \mathbf{v}_G = \mathbf{r}_G \wedge M \mathbf{v}_G = \mathbf{L}_G\,. \tag{7.46}$$

2. Il secondo è il vettore nullo. Infatti

$$\sum_i \mathbf{r}_G \wedge m_i \mathbf{v}'_i = \mathbf{r}_G \wedge \sum_i m_i \mathbf{v}'_i \tag{7.47}$$

   ma $\sum_i m_i \mathbf{v}'_i = \mathbf{0}$, in quanto sarebbe la derivata temporale di $\sum_i m_i \mathbf{r}'_i$ che è il raggio vettore del centro di massa rispetto ad un sistema di riferimento centrato sul centro di massa (e quindi è il vettore nullo).

3. Il terzo termine è il vettore nullo, poiché

$$\sum_i \mathbf{r}'_i \wedge m_i \mathbf{v}_G = \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \wedge \mathbf{v}_G \tag{7.48}$$

   e $\sum_i m_i \mathbf{r}'_i$ è il raggio vettore del centro di massa rispetto ad un sistema di riferimento centrato sul centro di massa (e quindi è il vettore nullo).

4. L'ultimo termine è il momento angolare relativo al centro di massa, ovvero il momento angolare del sistema di punti rispetto ad un sistema di riferimento con assi paralleli a quelli del SdR inerziale di partenza, con centro nel centro di massa del sistema.

Quindi

Teorema 7.5.1 *Il momento angolare di un sistema di punti rispetto all'origine di un SdR inerziale è esprimibile mediante la somma del momento angolare del centro di massa e del momento angolare relativo al centro di massa:*

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{L}_G + \mathbf{L}'\,, \tag{7.49}$$

dove

$$\mathbf{L}_G = \mathbf{r}_G \wedge M \mathbf{v}_G \tag{7.50}$$

e

$$\mathbf{L}' = \sum_i \mathbf{r}'_i \wedge m_i \mathbf{v}'_i\,. \tag{7.51}$$

7.6 Equazioni Cardinali e sistemi isolati

Le equazioni cardinali della dinamica sono quindi

$$\mathbf{R}^{ext} = \dot{\mathbf{Q}}\,, \tag{7.52}$$
$$\mathbf{M}_O^{ext} = \dot{\mathbf{L}}_O\,, \tag{7.53}$$

dove abbiamo preso come centro di riduzione per i momenti O il centro di massa del sistema oppure un punto fermo nel SdR inerziale considerato.

Supponiamo di avere un sistema isolato, ovvero un sistema di punti che non sia soggetto a forze esterne. Allora $\mathbf{R}^{ext} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{M}_O^{ext} = \mathbf{0}$. Ne deriva che

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{L}}_O = \mathbf{0} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \mathbf{Q} = \mathbf{cost} \\ \mathbf{L}_O = \mathbf{cost}\,. \end{cases} \tag{7.54}$$

Se il sistema è isolato, si conservano la sua quantità di moto e il suo momento rispetto al centro di massa del sistemad O.

Si può leggere questa legge di conservazione anche al contrario e utilizzarla per dare una formulazione alternativa al terzo principio della dinamica.

Partiamo dall'osservazione sperimentale che in un SdR inerziale per un sistema isolato (cioè non soggetto a forze esterne, posto suficientemente lontano da qualsiasi altro corpo che possa interagire con i punti del sistema) si conservano i vettori $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{L}_O$. Allora, possiamo riottiene il principio di azione e reazione. Infatti, prendiamo per semplicità un sistema costituito da due punti (ma il ragionamento si può estendere ad un numero qualsivoglia di punti). Si avrà

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = \mathbf{cost}\,, \tag{7.55}$$

da cui segue che

$$\dot{\mathbf{Q}} = \dot{\mathbf{q}}_1 + \dot{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{0}\,. \tag{7.56}$$

Siccome $\dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{F}_i$, ovvero la derivata della quantità di moto del punto i-esimo è pari alla risultante delle forze interne agenti sul punto (trattandosi solo di due punti, è pari alla forza con cui P_j agisce su P_i), si avrà anche

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2\,. \tag{7.57}$$

Cioè la forza che agisce da P_j su P_i deve avere modulo uguale, direzione uguale e verso opposto alla forza che agisce da P_i a P_j.

D'altra parte si avrà anche

$$\dot{\mathbf{L}}_O = \mathbf{0} = \mathbf{M}_O = \mathbf{m}_{1\,O} + \mathbf{m}_{2\,O} = \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{F}_2\,. \tag{7.58}$$

Usando la (7.57), si ottiene

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \wedge \mathbf{F}_1 = \mathbf{0} \quad \text{oppure} \quad (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \wedge \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}\,, \tag{7.59}$$

cioè $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ sono lungo la congiungente di P_i con P_j (costituiscono una coppia di braccio nullo!).

Abbiamo ritrovato il principio di azione e reazione. Quindi un modo equivalente di enunciare il Terzo Principio della Dinamica è

Principio 7.6.1 *In un sistema di riferimento inerziale, per un sistema isolato la quantità di moto e il momento angolare si conservano.*

7.7 Teorema delle forze vive

Partiamo dalle solite

$$\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_i \tag{7.60}$$

e moltiplichiamo scalarmente a destra per $\mathbf{v}_i$ e sommiamo su i:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i = \sum_i m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{v}_i \,, \tag{7.61}$$

da cui, passando ai differenziali

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \sum_i d\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right) = d\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2\right) = dT \,, \tag{7.62}$$

dove per T intendiamo l'energia cinetica totale del sistema. Allora, integrando

$$T(B) - T(A) = L_{AB} \tag{7.63}$$

dove L_{AB} è il lavoro totale, fatto sugli n punti materiali, dalla configurazione A alla configurazione B. Per mettere in evidenza il diverso contributo delle $\mathbf{F}_i$ nel lavoro L_{AB}, operiamo la stessa distinzione, fatta nel paragrafo precedente, fra forze esterne ed interne:

$$T(B) - T(A) = \sum_i \int_A^B (\mathbf{F}_i^{ext} + \mathbf{F}_i^{int}) \cdot d\mathbf{r}_i = L_{AB}^{ext} + L_{AB}^{int} \tag{7.64}$$

In generale, pero', il lavoro fatto dalle forze interne è diverso da zero (le distanze relative fra i punti cambiano). Quando faremo il corpo rigido, vedremo che in quel caso particolare $L_{AB}^{int} = 0$, in quanto le distanze relative fra i punti del sistema rigido rimangono costanti nel tempo.

7.8 Teorema di König per l'energia cinetica

Abbiamo definito l'energia cinetica totale del sistema come

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \,, \tag{7.65}$$

dove $\mathbf{v}_i$ è la velocità dell'i-esimo punto pateriale, ovvero la derivata del suo raggio vettore $\mathbf{r}_i$ rispetto al tempo. Consideriamo la figura che abbiamo utilizzato per il teorema di König per il moemnto angolare e riproponiamo la scomposizione del raggio vettore che individua il punto i-esimo come somma del raggio vettore del centro di massa e del raggio vettore relativo al centro di massa

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_G + \mathbf{r}_i' \,. \tag{7.66}$$

Per le velocità si ha

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_G + \mathbf{v}_i' \tag{7.67}$$

e quindi, sostituendo nella (7.65)

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_G + \mathbf{v}_i') \cdot (\mathbf{v}_G + \mathbf{v}_i') \,, \tag{7.68}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i v_G^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2 + \sum_i m_i \mathbf{v}_G \cdot \mathbf{v}_i' \,, \tag{7.69}$$

$$= \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2 + \mathbf{v}_G \cdot \sum_i m_i \mathbf{v}_i' \tag{7.70}$$

L'ultimo termine è nullo per le considerazioni già fatte in precedenza: sarebbe la derivata temporale del raggio vettore del centro di massa nel sistema di riferimento del centro di massa stesso e quindi il vettore nullo.

Quindi, come risultato, si ottiene

Teorema 7.8.1 *L'energia cinetica di un sistema di punti materiali è la somma dell'energia cinetica del centro di massa e dell'energia cinetica relativa al centro di massa*

$$T = T_{CM} + T' \,. \tag{7.71}$$

7.9 Forze conservative

Supponiamo adesso che sia le forze esterne che le forze interne che agiscono sul sistema siano conservative. Si giunge così, anche nel caso dei sistemi di punti materiali, alla conservazione dell'energia meccanica $E = T + V$. Infatti, supponiamo che sull'i-esimo punto agisca la risultante delle forze esterne $\mathbf{F}_i$. Il lavoro totale delle forze esterne sarà:

$$L_{AB}^{ext} = \sum_i \int_A^B \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = -\sum_i \int_A^B \nabla V_i \cdot d\mathbf{r}_i = -\sum_i \left(V_i(A) - V_i(B)\right) \,. \tag{7.72}$$

Per quanto riguarda il lavoro delle forze interne, prendiamo in considerazione due punti materiali, P_i e P_j. Siamo nell'ipotesi che $\mathbf{F}_{ij}$ e $\mathbf{F}_{ji}$ siano conservative. Per il terzo principio si avrà:

$$\mathbf{F}_{ij} = -\nabla_i V_{ij} = \nabla_j V_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} \,, \tag{7.73}$$

con

$$V_{ij} = V(\| \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \|) \tag{7.74}$$

e ∇_i gradiente rispetto alla variabile $\mathbf{r}_i$.

Il lavoro totale delle forze interne sarà dato dalla somma

$$2\, L_{AB}^{int} = \sum_i \int_A^B \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i + \sum_j \int_A^B \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{r}_j = -\sum_i \int_A^B \nabla_i V_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i - \sum_j \int_A^B \nabla_j V_{ji} \cdot d\mathbf{r}_j \tag{7.75}$$

e ponendo $\nabla_{ij} V_{ij} = \nabla_i V_{ij} = -\nabla_j V_{ij}$ e $d\mathbf{r}_{ij} = d\mathbf{r}_i - d\mathbf{r}_j$, si ottiene:

$$L_{AB}^{int} = -\frac{1}{2}\sum_{ij} \int_A^B \nabla_{ij} V_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij} = -\frac{1}{2}\sum_{ij} \left(V_{ij}(B) - V_{ij}(A)\right) \tag{7.76}$$

È logico, allora, definire un'energia potenziale totale V come:

$$V = \sum_i V_i + \frac{1}{2}\sum_{ij} V_{ij} \tag{7.77}$$

mediante la quale, una volta definita l'energia cinetica totale come

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 \tag{7.78}$$

si possa asserire che l'energia totale meccanica si conserva:

$$E = T + V \,. \tag{7.79}$$

7.10 Il problema dei due corpi nel SdR centrato sul Sole

7.11 Il problema dei due corpi nel SdR del centro di massa

Capitolo 8

APPUNTI SUL CORPO RIGIDO

8.1 Cinematica del corpo rigido

Per corpo rigido si intende un insieme di punti materiali, per i quali valga il seguente vincolo:

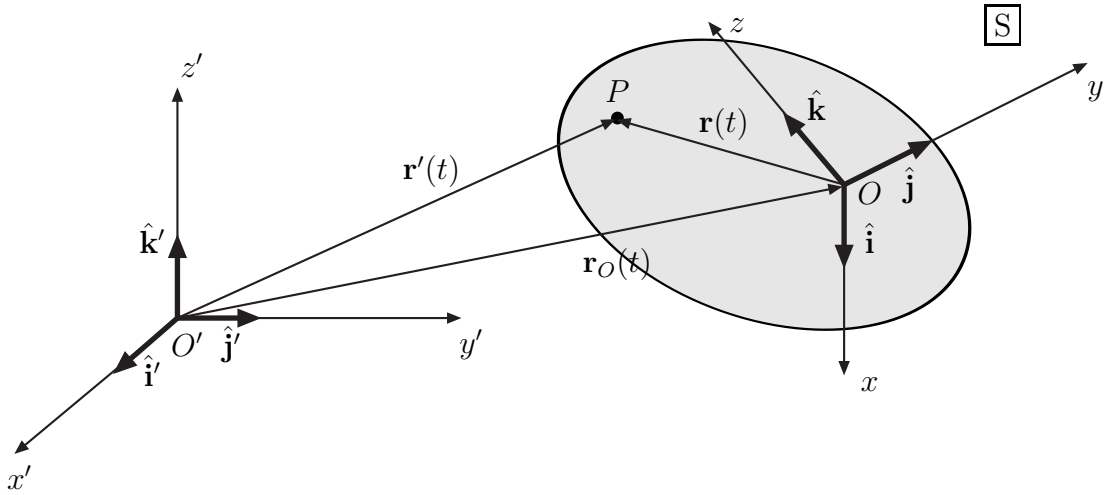
$$\| P_i - P_j \| = cost\,, \tag{8.1}$$

ovvero

$$\frac{d}{dt} \| P_i - P_j \| = 0\,. \tag{8.2}$$

Un corpo rigido tri-dimensionale ha 6 gradi di libertà (g.d.l.), cioè sono sufficienti 6 parametri indipendenti per poterne descrivere la configurazione ad ogni istante t. Per giustificare ciò basta pensare al fatto che la configurazione di un corpo rigido è fissata quando sono fissati nello spazio tre dei suoi punti, non allineati. Per fissare il primo punto abbiamo bisogno di tre g.d.l. Il secondo punto può quindi muoversi solo su una superficie sferica che abbia per centro il primo punto. Per fissare il secondo punto, quindi, abbiamo bisogno di altri due g.d.l. Lâultimo punto può stare solo su una circonferenza che sia posta sul piano perpendicolare allâasse passante per i due punti precedenti e abbia per centro lâintersezione del piano con lâasse stessa. Quindi, fissare il terzo punto necessita di un ulteriore parametro (g.d.l.). In totale 6.

Si può anche pensare di studiare la configurazione del sistema rigido fissando sul corpo una terna cartesiana S che partecipi quindi del moto del corpo stesso.



La configurazione del corpo rigido sarà allora determinata dalla configurazione di S, fissato sul

corpo, rispetto al SdR âfissoâ in cui si vuole studiare il corpo rigido. Tale configurazione è fissata da 6 parametri: tre parametri per individuare lâorigine del sistema e tre angoli di Eulero per la rotazione rispetto al sistema fisso.

Per studiare la cinematica di un sistema rigido, basta, quindi, rifarsi a quanto detto nel paragrafo della cinematica relativa, considerando il vincolo di rigidità. Infatti se fissiamo il sistema di riferimento S sul corpo, questo parteciperà del moto del corpo stesso.
Il punto O, origine del sistema di riferimento S, sarà un punto generico del corpo rigido. La velocità di un altro punto P appartenente al corpo rigido sarà data da

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \overrightarrow{\omega} \wedge (P - O)\,, \tag{8.3}$$

in quanto, per la stessa definizione di corpo rigido $\mathbf{v}_R = \mathbf{0}$. La precedente è detta *formula del Mozzi*. La $\overrightarrow{\omega}$, che chiaramente è funzione del tempo, è la velocità angolare propria del corpo rigido e dipende esclusivamente dal suo moto. Infatti, supponiamo di prendere un altro punto di riferimento del corpo rigido O, invece di O. Rispetto ad O, si avrà

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{O''} + \overrightarrow{\omega}'' \wedge (P - O'')\,, \tag{8.4}$$

ma dovrà essere $\overrightarrow{\omega}'' = \overrightarrow{\omega}$ poiché O è pur sempre un punto del corpo, per cui anche per lui vale la

$$\mathbf{v}_{O''} = \mathbf{v}_o + \overrightarrow{\omega} \wedge (O'' - O)\,. \tag{8.5}$$

Sottraendo la (8.5) dalla (8.3), si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_P - \mathbf{v}_{O''} &= \overrightarrow{\omega} \wedge (P - O) - \overrightarrow{\omega} \wedge (O'' - O) \\ &= \overrightarrow{\omega} \wedge (P - O'')\,, \end{aligned} \tag{8.6}$$

che è la (2.62) con $\overrightarrow{\omega}'' = \overrightarrow{\omega}$.
Per l'accelerazione si ha

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_o + \dot{\overrightarrow{\omega}} \wedge (P - O) + \overrightarrow{\omega} \wedge [\overrightarrow{\omega} \wedge (P - O)] \tag{8.7}$$

8.2 Considerazioni su ω e v_o

Facciamo due esempi banali di moti rigidi, per capire il ruolo della velocità angolare ω e di $\mathbf{v}_o$.

- Se $\overrightarrow{\omega} = \mathbf{0}$, avremo che, presi in qualsiasi modo P ed O appartenenti al corpo rigido, $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_o$; cioè tutti i punti si muoveranno con la stessa velocità. Il moto che ne deriva si dice traslatorio.

- Se $\mathbf{v}_o = \mathbf{0}$, avremo $\mathbf{v}_P = \overrightarrow{\omega} \wedge (P - O)$.
  Con $\overrightarrow{\omega}$ costante, i punti della retta passante per il centro O e parallela ad $\overrightarrow{\omega}$ hanno velocità nulla: il corpo rigido ruota attorno a questa retta (asse di rotazione); i punti del corpo rigido formano traiettorie circolari, che giacciono su piani perpendicolari all'asse di rotazione, con centro il punto di intersezione del piano con l'asse e velocità angolare $\| \omega \|$.
  Con $\overrightarrow{\omega}$ non costante abbiamo un moto di precessione, in cui, istante per istante, c'è un'asse di rotazione parallela ad $\overrightarrow{\omega}$, attorno alla quale si compie un atto di moto rotatorio.

8.3 Moti rigidi piani

Il moto descritto nella prima parte del secondo punto del paragrafo precedente, cioè in cui

- $\overrightarrow{\omega} =$ costante
- $\mathbf{v}_o \cdot \overrightarrow{\omega} = 0$

si dice moto rigido piano. I punti del sistema hanno velocità perpendicolare alla direzione di ω. Anche se non si tratta di un corpo rigido piatto (che non esiste), il moto del sistema resta descritto da quello dei punti di un piano perpendicolare ad ω, che viene detto piano rappresentativo.
Per quanto riguarda l'accelerazione, si ha

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_o + \omega \mathbf{k} \wedge (P - O) - \omega^2 (P - O) \tag{8.8}$$

8.4 Rotolamento puro

Per rotolamento puro si intende il rotolamento, per esempio di un disco rigido, senza la possibilità di slittamento. Schematiziamo il problema come piano. Il punto di contatto col piano vincolare, sul quale il disco rotola (chiaramente fra disco e piano c'è l'attrito sufficiente affinché questo avvenga) è istantaneamente fermo.

Per ricavare una formula cinematica che caratterizzi il moto, possiamo applicare la formula del Mozzi identificando O col punto di contatto. Si ha, allora

$$\mathbf{v}_P = \overrightarrow{\omega} \wedge (P - O) \tag{8.9}$$

determinando la distribuzione di moto in figura

In particolare la velocità del centro del cerchio è legata alla velocità angolare dalla

$$v_P = r\dot{\theta} \tag{8.10}$$

che risponde all'intuizione che ci dice che, se il cerchio non può scivolare, lo spostamento che fa il centro è esattamente l'arco di circonferenza $r\Delta\theta$ ruotato.