

La Lista (v0.23)

Questa lista verrà aggiornata continuamente con l'inserimento di

- (1) argomenti trattati durante il corso
- (2) prerequisiti necessari la cui conoscenza è ritenuta indispensabile

Attenzione: l'inserimento di nuovi elementi non avviene necessariamente alla fine della lista. Controllate sempre tutte le sezioni.

1 Varie

(V1) (Coefficiente binomiale). Se $n, k \in \mathbb{N}$, definisco

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

(V2) (Coefficiente binomiale generalizzato). Se $b \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ e $k \in \mathbb{N}$, definisco

$$\binom{b}{k} := \frac{b(b-1)(b-2)\cdots(b-k+1)}{k!}.$$

Esempio:

$$\binom{1/2}{4} = \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)(-5/2)}{4!} = -\frac{5}{128}$$

(V3) (Potenza di un binomio).

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad a, b \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), n \in \mathbb{N}.$$

(V4) (Somma geometrica finita).

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

2 Analisi reale

(AR1) (Def: estremo superiore). Sia A un insieme di numeri reali. Il numero reale s è detto *estremo superiore* di A (e si scrive $s = \sup A$) se

- (a) per ogni $x \in A$ si ha $x \leq s$
- (b) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x \in A$ tale che $x > s - \varepsilon$.

(AR2) (Sviluppo di Taylor con resto di Lagrange). Sia $f \in C^{n+1}(a, b)$ e $x_0 \in (a, b)$. Allora, per ogni $x \in (a, b)$ esiste $\xi(x)$ compreso fra x_0 e x tale che

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

(AR3) (Alcuni sviluppi in serie di potenze).

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} & (x \in \mathbb{R}) & & \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n & (|x| < 1) \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & (x \in \mathbb{R}) & & \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} & (x \in \mathbb{R}) \\ \sinh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & (x \in \mathbb{R}) & & \cosh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} & (x \in \mathbb{R}) \\ \log(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} & (|x| < 1) & & \arctan x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} & (|x| < 1) \end{aligned}$$

(AR4) (Condizione necessaria per la convergenza di una serie: la successione associata è infinitesima). Se la serie di numeri reali (o complessi) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è convergente, allora si ha $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

(AR5) (Controesempio: La condizione $a_k \rightarrow 0$ non è sufficiente per la convergenza della serie associata). Sia $a_k = 1/k$. Allora $a_k \rightarrow 0$, ma $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k = \infty$.

(AR6) (Convergenza di una serie o di un integrale speciale). La serie e l'integrale

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha (\log k)^\beta} \qquad \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\log x)^\beta}$$

sono convergenti se e solo se $\alpha > 1$ oppure se $\alpha = 1$ e $\beta > 1$.

(AR7) (Integrali notevoli). Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n! \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} x^{2n} dx = (2n-1)!!$$

3 I numeri complessi

(NC1) (Def: campo). Definizione di campo.

(NC2) (Def: definizione del modulo, usando il coniugato). $|z| := \sqrt{z\bar{z}}$.

(NC3) (Def: definizione del modulo, usando la parte reale e la parte immaginaria). Se $z = x + iy$ con x, y reali, $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$.

(NC4) (Proprietà del modulo e della coniugazione).

- (a) $\overline{w+z} = \overline{w} + \overline{z}$.
- (b) $\overline{wz} = \overline{w} \overline{z}$.
- (c) $\overline{\overline{z}} = z$.
- (d) $|wz| = |w| |z|$.
- (e) $|\overline{z}| = |z|$.
- (f) $|w+z| \leq |w| + |z|$ (disuguaglianza triangolare).
- (g) $|w \pm z| \geq ||w| - |z||$ (disuguaglianza triangolare inversa).
- (h) $|w+z|^2 + |w-z|^2 = 2(|w|^2 + |z|^2)$ (regola del parallelogramma).

(NC5) (Forma polare, argomento). $z \in \mathbb{C}$ è espresso in *forma polare* se $z = \rho e^{i\vartheta}$, in cui ρ è un numero reale *positivo* e ϑ è un numero reale. L'*argomento* di z si denota con $\arg z$ ed è definito come

$$\arg z := \vartheta + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(NC6) (Argomento principale). Se $z = \rho e^{i\vartheta}$ è espresso in forma polare l'*argomento principale* di z si denota con $\text{Arg } z$ ed è dato dall'unico valore di $\vartheta' = \vartheta + 2k\pi$ tale che $-\pi < \vartheta' \leq \pi$.

(NC7) (Argomento con il taglio sul semiasse reale positivo, "argomento più"). Se $z = \rho e^{i\vartheta}$ è espresso in forma polare l'*argomento più* di z si denota con $\arg_+ z$ ed è dato dall'unico valore di $\vartheta' = \vartheta + 2k\pi$ tale che $0 \leq \vartheta' < 2\pi$.

(NC8) (Esempio: forma polare, argomento). $z = 3e^{i(15\pi/4)}$ è espresso in forma polare. Quindi

$$\begin{aligned} \arg z &= \frac{15\pi}{4} + 2k\pi = \left\{ \dots, -\frac{9\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}, \frac{23\pi}{4}, \frac{31\pi}{4}, \dots \right\} = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{Arg } z &= -\frac{\pi}{4} \\ \arg_+ z &= \frac{7\pi}{4}. \end{aligned}$$

(NC9) (Non Esempio: forma polare, argomento). *Attenzione:* $z = -3e^{i(5\pi/4)}$ *non* è espresso in forma polare a causa del segno meno. Quindi per trovare l'argomento di z bisogna prima scriverlo correttamente in forma polare. Usando l'identità $-1 = e^{i\pi}$ si trova

$$z = -3e^{i(5\pi/4)} = 3e^{i\pi} e^{i(5\pi/4)} = 3e^{i(9\pi/4)}.$$

A questo punto si procede come al punto (NC8).

(NC10) (Trasformazione polare \rightarrow rettangolare). Se $z = \rho e^{i\vartheta}$,

$$\text{Re } z = \rho \cos \vartheta \quad \text{Im } z = \rho \sin \vartheta$$

(NC11) (Trasformazione rettangolare \rightarrow polare). Se $z = x + iy$,

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \rho &= |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \vartheta &= \arctan(y/x) \underbrace{+ \pi}_{\text{se } x < 0} + 2k\pi. \end{aligned}$$

(NC12) (Esempio: trasformazione rettangolare \rightarrow polare). Se $z = -1 - i$, si ha

$$\arctan(y/x) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Poichè z si trova nel terzo quadrante devo aggiungere π e ottengo

$$\vartheta = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}.$$

L'argomento generico di z è dato da

$$\arg z = \vartheta + 2k\pi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi.$$

Per trovare l'argomento principale e l'argomento più bisogna, a questo punto, scegliere il k "giusto". Si trova

$$\text{Arg } z = \vartheta - 2\pi = -\frac{3\pi}{4} \qquad \arg_+ z = \vartheta = \frac{5\pi}{4}.$$

(NC13) (Potenza di un numero espresso in forma polare). Se $z = \rho e^{i\vartheta}$, allora $z^n = \rho^n e^{in\vartheta}$.

(NC14) (Formula di De Moivre). $(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)^n = \cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta)$.

(NC15) (Soluzione dell'equazione $z^n = w$. Aspetto algebrico). Per trovare tutte le soluzioni di $z^n = w$: scrivere w in forma polare $w = r e^{i\alpha}$. Quindi si ha:

$$z = \sqrt[n]{r} \exp \left[i \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right] \qquad k = 0, 1, \dots, n-1$$

(NC16) (Soluzione dell'equazione $z^n = w$. Aspetto geometrico). Le soluzioni di $z^n = w$ sono i vertici di un poligono regolare con n lati e si trovano sulla circonferenza centrata in 0 di raggio $\sqrt[n]{|w|}$ (fig. 1).

4 Luoghi geometrici nel piano complesso

(LG1) $\{|z - a| = r\}$. Circonferenza di centro a e raggio r .

(LG2) $\{|z - a| \leq r\}$. Disco chiuso di centro a e raggio r .

(LG3) $\{r_1 \leq |z - a| \leq r_2\}$. Corona circolare di centro a e raggi r_1, r_2 .

(LG4) $\{|z - a| = |z - b|\}$. Asse del segmento $[a, b]$.

(LG5) $\{|z - a| \leq |z - b|\}$. Semipiano delimitato dall'asse del segmento $[a, b]$ contenente a .

(LG6) $\{a \leq |z| \leq b, c \leq \arg z \leq d\}$. Settore di corona circolare centrato nell'origine, di raggi a e b e angoli c e d .

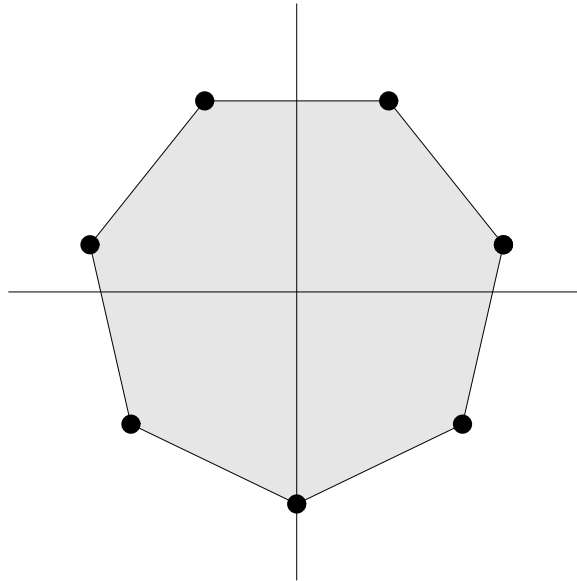


Figura 1: Le 7 soluzioni dell'equazione $z^7 = 2i$.

5 Mappe elementari

(MAP1) $w = f(z) = z + a$. Traslazione.

(MAP2) $w = f(z) = uz$. Dilatazione di un fattore $|u|$ e rotazione attorno all'origine di un angolo $\arg u$. Esempio: $f(z) = 2iz$, quindi $u = 2i$, $|u| = 2$ e $\arg u = \pi/2$. In questo caso si ha una duplicazione delle dimensioni lineari e una rotazione di 90 gradi (fig. 2).

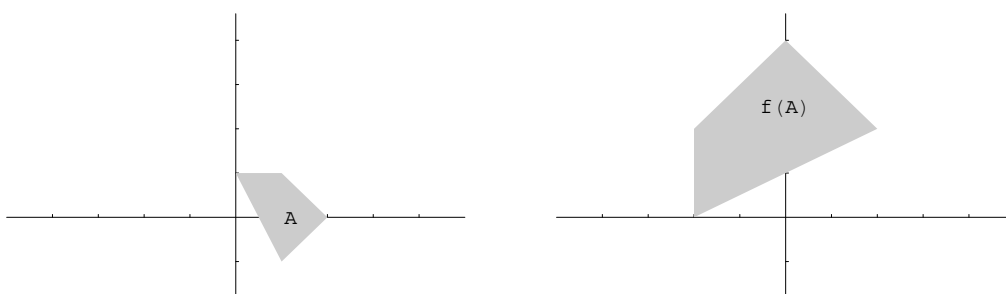


Figura 2: Mappa $w = 2iz$

(MAP3) $w = f(z) = z^n$. Il settore di corona circolare $A = \{\rho_1 \leq |z| \leq \rho_2, \vartheta_1 \leq \arg z \leq \vartheta_2\}$ si trasforma nel settore di corona circolare $f(A) = \{\rho_1^n \leq |w| \leq \rho_2^n, n\vartheta_1 \leq \arg w \leq n\vartheta_2\}$ (fig. 3). Nel caso in cui $n(\vartheta_2 - \vartheta_1) \geq 2\pi$, l'insieme $f(A)$ è una corona circolare.

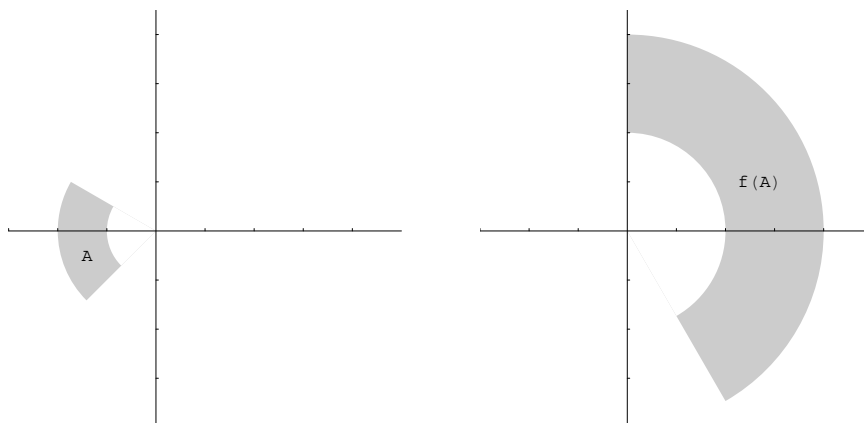


Figura 3: Mappa $w = z^2$

(MAP4) $w = f(z) = \exp z$. Il rettangolo $A = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ si trasforma nel settore di corona circolare $f(A) = \{e^a \leq |w| \leq e^b, c \leq \arg w \leq d\}$ (fig. 4). Nel caso in cui $d - c \geq 2\pi$, l'insieme $f(A)$ è una corona circolare.

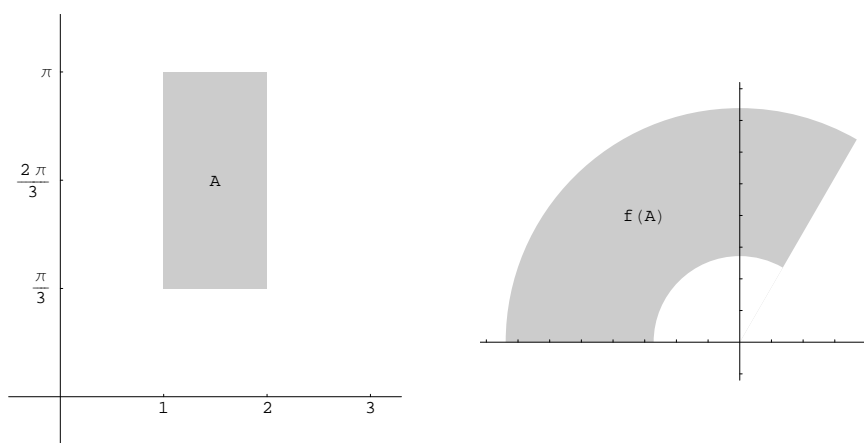


Figura 4: Mappa $w = \exp z$

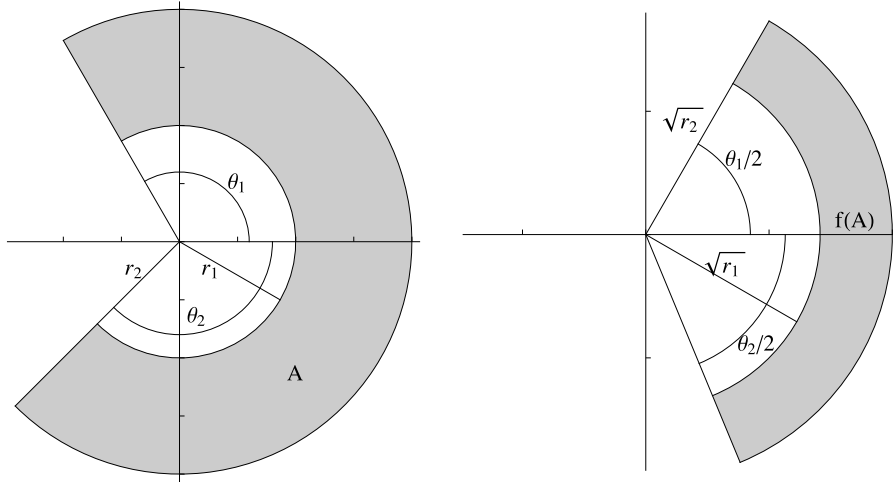


Figura 5: Mappa $w = \sqrt{z}$

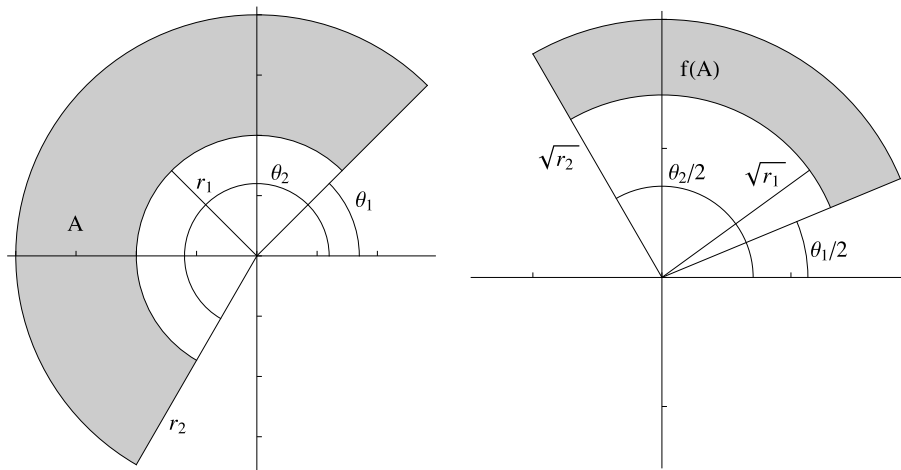


Figura 6: Mappa $w = \sqrt{z^{(+)}}$

(MAP5) $w = f(z) = \sqrt[n]{z}$. Siano $\vartheta_1, \vartheta_2 \in [0, \pi)$. Il settore di corona circolare

$$A := \{re^{i\vartheta} : r_1 \leq r \leq r_2, -\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2\}$$

si trasforma nel settore di corona circolare

$$f(A) := \{re^{i\vartheta} : \sqrt[n]{r_1} \leq r \leq \sqrt[n]{r_2}, -\vartheta_1/n \leq \vartheta \leq \vartheta_2\}.$$

Vedi figura 5.

(MAP6) $w = f(z) = \sqrt[n]{z^{(+)}}$. Siano $\vartheta_1, \vartheta_2 \in (0, 2\pi)$. Il settore di corona circolare

$$A := \{re^{i\vartheta} : r_1 \leq r \leq r_2, \vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2\}$$

si trasforma nel settore di corona circolare

$$f(A) := \{re^{i\vartheta} : \sqrt[n]{r_1} \leq r \leq \sqrt[n]{r_2}, \vartheta_1/n \leq \vartheta \leq \vartheta_2\}.$$

Vedi figura 6.

6 Serie di potenze

(SP1) (Formula di Stirling). Per ogni intero positivo n si ha

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} (1 + \varepsilon_n) \quad \text{in cui } \varepsilon_n \rightarrow 0.$$

(SP2) (Def: limite superiore di una successione reale). Il *limite superiore* della successione reale (a_n) è definito come

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k.$$

(SP3) (Alcune proprietà del limite superiore).

- (a) $\overline{\lim}_n (a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_n a_n + \overline{\lim}_n b_n$
- (b) Se $a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0$, allora $\overline{\lim}_n (a_n b_n) \leq (\overline{\lim}_n a_n) (\overline{\lim}_n b_n)$
- (c) Se $\lim_n a_n = a$ e $a > 0$, allora $\overline{\lim}_n (a_n b_n) = a \cdot (\overline{\lim}_n b_n)$.

(SP4) (Raggio di convergenza di una serie di potenze). Il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ è dato da

$$R = \left(\overline{\lim}_n |c_n|^{1/n} \right)^{-1} \in [0, \infty].$$

Valgono le seguenti identità, a patto che esistano i limiti al secondo membro:

$$R = \left(\lim_n |c_n|^{1/n} \right)^{-1} \quad (\text{criterio della radice})$$

$$R = \lim_n \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \quad (\text{criterio del rapporto})$$

(SP5) Sia $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ crescente. Allora il raggio di convergenza R della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{g(n)}$$

è dato da

$$R := \left(\limsup |a_n|^{1/g(n)} \right)^{-1}$$

(SP6) (Trucco: butta via le potenze di n). Se $\alpha \in \mathbb{R}$, le due serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^\alpha c_n (z - z_0)^n$$

hanno lo stesso r.d.c., quindi, *ai soli fini del calcolo del r.d.c.*, il fattore n^α può essere eliminato.

(SP7) (Alcuni sviluppi in serie di potenze).

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (z \in \mathbb{C}) & \frac{1}{1-z} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1) \\ \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (z \in \mathbb{C}) & \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (z \in \mathbb{C}) \\ \sinh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (z \in \mathbb{C}) & \cosh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (z \in \mathbb{C}) \\ \log(1+z) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} \quad (|z| < 1) & \arctan z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \quad (|z| < 1) \end{aligned}$$

(SP8) (Condizione necessaria per la convergenza di una serie: la successione associata è infinitesima). Se la serie di numeri reali (o complessi) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è convergente, allora si ha $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

(SP9) (Controesempio: La condizione $a_k \rightarrow 0$ non è sufficiente per la convergenza della serie associata). Sia $a_k = 1/k$. Allora $a_k \rightarrow 0$, ma $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k = \infty$.

7 Funzioni analitiche

(FA1) (Def: funzioni differenziabili e analitiche). Sia G aperto in \mathbb{C} , $a \in G$ e $f : G \mapsto \mathbb{C}$. f è detta *differenziabile* in a se esiste il limite

$$f'(a) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad h \in \mathbb{C}.$$

f è detta *analitica* se è differenziabile con derivata continua.

(FA2) (Teo: differenziazione di una serie di potenze). Sia

$$(7.1) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad z \in B_R(z_0),$$

in cui R è il r.d.c. della serie. Allora

- (a) f è infinitamente differenziabile in $B_R(z_0)$
- (b) le derivate si possono fare “termine a termine”, vale a dire

$$(7.2) \quad f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) c_n (z - z_0)^{n-k} \quad z \in B_R(z_0)$$

- (c) la serie di potenze (7.2) ha lo stesso r.d.c. R della serie di potenze (7.1).
- (d) $c_n = f^{(n)}(z_0)/n!$.

(FA3) (Cor: serie di potenze \Rightarrow analitica). Una serie di potenze centrata in z_0 con r.d.c. R è una funzione analitica in $B_R(z_0)$.

(FA4) (Teo: se $f' = 0$, f è costante). Sia G aperto e connesso in \mathbb{C} e sia $f : G \mapsto \mathbb{C}$ una funzione differenziabile tale che $f'(z) = 0$ per ogni $z \in G$. Allora f è costante su G .

8 Funzioni elementari e loro proprietà

(FE1) (Alcune proprietà dell'esponenziale).

- (a) $De^z = e^z$.
- (b) $e^w e^z = e^{w+z}$.
- (c) e^z non è mai uguale a zero (segue da $e^z e^{-z} = 1$).
- (d) $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$.
- (e) $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$.
- (f) $\operatorname{Re} e^z = e^{\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z)$. Esempio: $\operatorname{Re}(e^{3+2i}) = e^3 \cos(2)$.
- (g) $\operatorname{Im} e^z = e^{\operatorname{Re} z} \sin(\operatorname{Im} z)$.
- (h) \exp è $2\pi i$ periodica, vale a dire se k è un intero, si ha $e^{z+i(2k\pi)} = e^z$.

(FE2) (Alcune proprietà delle funzioni trigonometriche).

- (a) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.
- (b) $D(\sin z) = \cos z$
- (c) $D(\cos z) = -\sin z$
- (d) $\sin(w \pm z) = \sin w \cos z \pm \cos w \sin z$.
- (e) $\cos(w \pm z) = \cos w \cos z \mp \sin w \sin z$.
- (f) $\cos^2 z = (1 + \cos(2z))/2$.
- (g) $\sin^2 z = (1 - \cos(2z))/2$.

(FE3) (Legame fra funzioni trigonometriche e iperboliche).

(a) $\sin(iz) = i \sinh(z)$.

(b) $\cos(iz) = \cosh(z)$.

(FE4) (Trucco: come ricavare velocemente le proprietà delle funzioni iperboliche, a partire dalle analoghe proprietà delle funzioni trigonometriche).

(a) Esempio: sapendo che $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, sostituisco $z \rightarrow iz$ e ottengo $\cos^2(iz) + \sin^2(iz) = 1$. Quindi, ricordando la relazione fra \sin e \sinh e quella fra \cos e \cosh , trovo

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1.$$

(b) Esempio: analogamente, a partire da $\sin(w+z) = \sin w \cos z + \cos w \sin z$, si ricava

$$\sinh(w+z) = \sinh w \cosh z + \cosh w \sinh z.$$

(FE5) (Parte reale ed immaginaria delle funzioni trigonometriche ed iperboliche).

(a) $\operatorname{Re}(\sin z) = \sin(\operatorname{Re} z) \cosh(\operatorname{Im} z)$

(b) $\operatorname{Im}(\sin z) = \cos(\operatorname{Re} z) \sinh(\operatorname{Im} z)$

(c) $\operatorname{Re}(\cos z) = \cos(\operatorname{Re} z) \cosh(\operatorname{Im} z)$

(d) $\operatorname{Im}(\cos z) = -\sin(\operatorname{Re} z) \sinh(\operatorname{Im} z)$.

Queste relazioni e le analoghe per le funzioni iperboliche non è necessario ricordarle a memoria. Infatti si possono ottenere velocemente a partire dalle formule di addizione degli archi e dalle relazioni che legano funzioni trigonometriche e iperboliche. Esempio: sia $z = x + iy$. Allora

$$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y,$$

da cui si ottiene

$$\operatorname{Re}(\sin z) = \sin x \cosh y \qquad \operatorname{Im}(\sin z) = \cos x \sinh y,$$

(FE6) (Equazione $\exp z = w$). Se $w \neq 0$, le soluzioni dell'equazione $\exp z = w$ sono date da

$$z = \log |w| + i(\arg w + 2k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Si noti che ci sono *infinite soluzioni* e che queste giacciono sulla retta verticale $x = \log |w|$ a distanza 2π l'una dalla successiva.

Se $w = 0$, l'equazione $\exp z = w$ non ha soluzioni (perchè l'esponenziale complesso non si annulla mai).

(FE7) (Equazione $\sin z = w$. Informazioni qualitative sulle soluzioni). L'equazione $\sin z = w$ ha sempre infinite soluzioni. Ci sono due casi:

- (a) se c'è una soluzione reale, allora le soluzioni sono tutte reali, vale a dire sono quelle già note dalla trigonometria reale, del tipo

$$\{\vartheta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \vartheta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Ad esempio

$$\sin z = 1/2 \quad \Rightarrow \quad z = \pi/6 + 2k\pi \text{ oppure } z = 5/6\pi + 2k\pi.$$

- (b) se c'è una soluzione non reale, allora tutte le soluzioni sono non reali e sono disposte su due rette orizzontali equidistanti dall'asse x . Più precisamente l'insieme delle soluzioni è del tipo

$$\{\vartheta + 2k\pi - i\beta\} \cup \{\pi - \vartheta + 2k\pi + i\beta\}$$

(FE8) (Equazione $\cos z = w$. Informazioni qualitative sulle soluzioni). L'equazione $\cos z = w$ ha sempre infinite soluzioni. Ci sono due casi:

- (a) se c'è una soluzione reale, allora le soluzioni sono tutte reali, vale a dire sono quelle già note dalla trigonometria reale, del tipo

$$\{\pm\vartheta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

Ad esempio

$$\cos z = 1/2 \quad \Rightarrow \quad z = \pm\pi/3 + 2k\pi.$$

- (b) se c'è una soluzione non reale, allora tutte le soluzioni sono non reali e sono disposte su due rette orizzontali equidistanti dall'asse x . Più precisamente l'insieme delle soluzioni è del tipo

$$\{\vartheta + 2k\pi - i\beta\} \cup \{-\vartheta + 2k\pi + i\beta\}$$

(FE9) (Def: ramo del logaritmo). Un *ramo del logaritmo* è una funzione continua $f : G \mapsto \mathbb{C}$ in cui G è una regione (insieme aperto e connesso) in \mathbb{C} e $\exp f(z) = z$ (vale a dire f è l'inversa dell'esponenziale).

(FE10) (Def: ramo principale del logaritmo). Il *ramo principale* del logaritmo è definito sull'insieme $G := \mathbb{C} \setminus \{z \leq 0\}$ come

$$\log z := \log |z| + i \operatorname{Arg} z$$

(ricorda che Arg è l'argomento principale).

(FE11) (Notazione. $\log =$ "ramo principale"). A meno che non venga detto esplicitamente il contrario, denotiamo con $\log z$ il ramo principale del logaritmo.

(FE12) (Def: ramo "più" del logaritmo). Il ramo "più" del logaritmo è definito sull'insieme $G := \mathbb{C} \setminus \{z \leq 0\}$ come

$$\log_+ z := \log |z| + i \arg_+ z$$

(FE13) (Occhio: non è sempre vero che $\log(e^z) = z$). Mentre è sempre vero, per un qualsiasi ramo del logaritmo, che $\exp(\log z) = z$ (per definizione!), non è detto che valga la stessa identità a funzioni invertite, cioè $\log(e^z) = z$. Ad esempio, sia $\log z$ il ramo principale del logaritmo. Allora:

$$\log(e^{i3\pi/2}) = \log|e^{i3\pi/2}| + i \operatorname{Arg}(e^{i3\pi/2}) = -i\pi/2 \neq i3\pi/2.$$

(FE14) (Occhio: non è sempre vero che ...). Non è sempre vero che $\log(wz) = \log w + \log z$ o che $\log(z^n) = n \log z$. È facile trovare controesempi.

(FE15) (Derivata del log). $D(\log z) = 1/z$ (per un ramo qualsiasi!).

(FE16) (Def: potenze con esponente complesso non intero). Sia $\log z : G \mapsto \mathbb{C}$ un ramo arbitrario del logaritmo. Il ramo corrispondente della funzione z^w è definito come

$$z^w := e^{w \log z} \quad z \in G.$$

(FE17) (Potenze con esponente complesso non intero. Ramo principale e ramo “più”).

$$\begin{array}{ll} \text{ramo principale} & z^w := \exp(w \log z) \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{z \leq 0\} \\ \text{ramo “più”} & [z^w]^{(+)} := \exp(w \log_+ z) \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{z \geq 0\}. \end{array}$$

(FE18) (Potenze con esponente reale non intero. Ramo principale e ramo “più”). Nel caso di esponente *reale* le formule precedenti possono essere semplificate e, usando la definizione del logaritmo, si ottiene

$$\begin{aligned} z^a &= \exp(a \log |z| + ia \operatorname{Arg} z) = |z|^a e^{ia \operatorname{Arg} z} \\ [z^a]^{(+)} &= \exp(a \log |z| + ia \arg_+ z) = |z|^a e^{ia \arg_+(z)} \end{aligned}$$

(FE19) (Caso particolare di esponente reale: radice n -sima Ramo principale e ramo “più”).

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{z} &= \sqrt[n]{|z|} e^{i \operatorname{Arg} z/n} & z \in \mathbb{C} \setminus \{z \leq 0\} \\ \sqrt[n]{z}^{(+)} &= \sqrt[n]{|z|} e^{i \arg_+ z/n} & z \in \mathbb{C} \setminus \{z \geq 0\} \end{aligned}$$

9 Condizioni di Cauchy–Riemann

(CR1) (Teo: analitica \Rightarrow Cauchy–Riemann). Sia G un aperto in \mathbb{C} e sia $f : G \mapsto \mathbb{C}$ analitica. Poniamo

$$z = x + iy \quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Allora

(a) valgono le seguenti uguaglianze fra le derivate di u e v

$$u_x = v_y \quad u_y = -v_x$$

(b) se u e v appartengono a $C^2(G)$, allora u e v sono armoniche, vale a dire $u_{xx} + u_{yy} = 0$ e $v_{xx} + v_{yy} = 0$.

- (CR2) (Teo: Cauchy-Riemann \Rightarrow analitica). Se G è una regione, $u, v \in C^1(G)$ e valgono le condizioni CR, allora la funzione complessa $f(z) := u(x, y) + iv(x, y)$ è analitica in G .
- (CR3) (Def: armonica coniugata). Sia G aperto in \mathbb{C} . Data una funzione armonica $u : G \mapsto \mathbb{R}$, la funzione $v : G \mapsto \mathbb{R}$ è detta *armonica coniugata* di u se $f := u + iv$ è analitica su G .
- (CR4) (Teo: esistenza dell'armonica coniugata). Sia $G \subset \mathbb{C}$ aperto e semplicemente connesso e sia $u : G \mapsto \mathbb{R}$ armonica. Allora esiste un'armonica coniugata v di u .

10 Integrazione nel campo complesso

- (I1) (Def: cammino). Un *cammino* in \mathbb{C} è una funzione continua $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$, in cui $[a, b]$ è un intervallo dell'asse reale.
- (I2) (Def: cammino regolare). Un cammino γ è detto *regolare* se γ' esiste ed è continua.
- (I3) (Def: cammino regolare a tratti). Un cammino γ è detto *regolare a tratti* (RAT) se esiste una partizione (t_i) del dominio $[a, b]$ tale che γ è regolare su ciascun intervallo $[t_i, t_{i+1}]$.
- (I4) (Def: traccia di un cammino). La *traccia* del cammino $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ si indica con $\{\gamma\}$ ed è definita come $\{\gamma\} := \{\gamma(t) \in \mathbb{C} : t \in [a, b]\}$.
- (I5) (Ma che differenza c'è fra un cammino e la sua traccia?) Un cammino è una funzione, mentre la sua traccia è l'immagine della funzione, quindi un sottoinsieme di \mathbb{C} . Ad esempio i due cammini

$$\gamma_1(t) := e^{it} \quad t \in [0, 2\pi] \qquad \gamma_2(t) := e^{i2t} \quad t \in [0, 2\pi]$$

sono diversi, poichè il primo percorre la circonferenza unitaria una volta, mentre il secondo la percorre due volte. Però γ_1 e γ_2 hanno la stessa traccia costituita appunto dalla circonferenza unitaria.

- (I6) (Def: lunghezza di un cammino). La *lunghezza* del cammino $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ è definita come $V(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt$.
- (I7) (Def: integrale lungo un cammino regolare a tratti) Sia G aperto in \mathbb{C} , $f : G \mapsto \mathbb{C}$ continua e sia $\gamma : [a, b] \mapsto G$ un cammino RAT. Si definisce *integrale di f lungo γ* la quantità

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

- (I8) (Proprietà dell'integrale).

- (a) Se u e v sono due numeri complessi, allora $\int_{\gamma}(uf + vg) = u \int_{\gamma} f + v \int_{\gamma} g$.
- (b) $\int_{-\gamma} f = - \int_{\gamma} f$
- (c) $\int_{\gamma+w} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z + w) dz$

$$(d) \left| \int_{\gamma} f \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz| \leq V(\gamma) \max_{\{\gamma\}} |f|.$$

(I9) (Teo: teorema fondamentale del calcolo integrale). Sia G aperto in \mathbb{C} , sia $\gamma : [a, b] \mapsto G$ un cammino RAT. Se $f : G \mapsto \mathbb{C}$ è continua ed ammette una primitiva F su un aperto che contiene $\{\gamma\}$, allora

$$\int_{\gamma} f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

(I10) (Cor: una condizione che implica integrale nullo). Siano G , f e γ come nel teorema precedente. Se f ammette una primitiva in G e γ è un cammino chiuso, allora $\int_{\gamma} f = 0$.

(I11) (Esempio: una classe importante di funzioni che ammettono una primitiva). Sia γ un cammino RAT chiuso. Allora

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (w - z)^n dw &= 0 && \text{se } n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ \int_{\gamma} \frac{dw}{(w - z)^n} &= 0 && \text{se } n = 2, 3, \dots \text{ e } z \notin \{\gamma\} \end{aligned}$$

(I12) (Formula integrale di Cauchy per cammini circolari). Sia G aperto in \mathbb{C} e $f : G \mapsto \mathbb{C}$ analitica. Siano $z_0 \in G$ e $R > 0$ tale che $\overline{B}_R(z_0) \subset G$. Allora

$$\int_{|w-z_0|=R} \frac{f(w)}{w - z} dw = 2\pi i f(z) \quad \forall z \in B_R(z_0).$$

(I13) (Analitica implica serie di potenze). Sia G aperto in \mathbb{C} e $f : G \mapsto \mathbb{C}$ analitica. Sia $z_0 \in G$ e $D := \text{dist}(z_0, G^c)$. Allora:

(1) la funzione f può essere sviluppata in serie di potenze come

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad z \in B_D(z_0)$$

(2) i coefficienti a_n sono dati da

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w) dw}{(w - z_0)^{n+1}}$$

in cui $\gamma(t) := z_0 + Re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$ e $0 < R < D$.

(I14) (Teo: stima di Cauchy). Sia G aperto in \mathbb{C} e $f : G \mapsto \mathbb{C}$ analitica. Sia $z_0 \in G$ e $R > 0$ tale che $\overline{B}_R(z_0) \subset G$. Se $|f(z)| \leq M$ per ogni $z \in \overline{B}_R(z_0)$, allora

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{M n!}{R^n}$$

(I15) (Teo: teorema di Cauchy per cammini contenuti in un disco). Sia G aperto in \mathbb{C} e $f : G \mapsto \mathbb{C}$ analitica. Se γ è un cammino chiuso, RAT, tale che la traccia di γ è contenuta in un disco $B_R(z_0) \subset G$. Allora

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

11 Teorema di Liouville e Teorema Fondamentale dell'Algebra

(TEO1) (Def: funzione intera). Una *funzione intera* è una funzione analitica su \mathbb{C} .

(TEO2) (Teo: teorema di Liouville). Se f è una funzione intera e limitata, allora f è costante.

(TEO3) (Teo: fondamentale dell'Algebra). Se $p(z)$ è un polinomio di grado almeno 1 (non costante) allora esiste $w \in \mathbb{C}$ tale che $p(w) = 0$.

(TEO4) (Cor: fattorizzazione dei polinomi). Ogni polinomio di grado $n > 0$ su \mathbb{C} può essere scritto nella forma

$$p(z) = \alpha (z - z_1)^{m_1} (z - z_2)^{m_2} \cdots (z - z_s)^{m_s} \quad \alpha, z_i \in \mathbb{C}, m_i \in \mathbb{N}^*.$$

in cui $m_1 = \cdots + m_s = n$.

(TEO5) (Def: molteplicità di uno zero di una funzione analitica). Sia G aperto in \mathbb{C} e $f : G \mapsto \mathbb{C}$ analitica e sia $z_0 \in G$ tale che $f(z_0) = 0$. Il punto z_0 è detto uno *zero di molteplicità m* , con m intero positivo, se esiste g analitica su G tale che

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \quad \text{e } g(z_0) \neq 0.$$

(TEO6) (Teo: ogni zero di una funzione analitica ha una molteplicità). Sia f una funzione analitica su una regione G , non identicamente nulla. Se $z_0 \in G$ e $f(z_0) = 0$, allora esiste un intero $m \geq 1$ tale che z_0 è uno zero di molteplicità m per f . In particolare, m è il più piccolo intero positivo tale che $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.

(TEO7) (Teo: teorema sui punti di accumulazione degli zeri). Sia G una regione in \mathbb{C} e $f : G \mapsto \mathbb{C}$ analitica. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (1) f è identicamente nulla su G
- (2) esiste $z_0 \in G$ tale che $f^{(n)}(z_0) = 0$ per ogni $n = 0, 1, 2, \dots$
- (3) l'insieme $\{z \in G : f(z) = 0\}$ ha un punto limite (di accumulazione) in G .

(TEO8) (Cor: due funzioni analitiche che coincidono su un insieme con un punto limite). Siano f e g due funzioni analitiche su una regione G del piano complesso, e sia A l'insieme degli $z \in G$ tali che $f(z) = g(z)$. Allora, se A ha un punto limite in G , si ha $f = g$ su tutto G .

(TEO9) (Molteplicità degli zeri di alcune funzioni elementari). Siano $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0$. Allora:

- (a) La funzione $f(z) = e^{az}$ non ha zeri.
- (b) La funzione $f(z) = e^{az} + b$ ha infiniti zeri semplici (di molteplicità 1) se $b \neq 0$.
- (c) La funzione $f(z) = \sin(az) + b$ ha infiniti zeri. Se $b \neq \pm 1$ gli zeri sono semplici. Se $b = \pm 1$ gli zeri sono doppi.
- (d) Quanto affermato al punto precedente è valido anche per le funzioni $\cos(az) + b$, $\cosh(az) + b$.
- (e) La funzione $f(z) = \sinh(az) + b$ ha infiniti zeri. Se $b \neq \pm i$ gli zeri sono semplici. Se $b = \pm i$ gli zeri sono doppi.

12 Teorema di Cauchy e formula integrale di Cauchy

(TC1) (Def: cammini omotopi). Sia G aperto in \mathbb{C} , $\gamma_0 : [0, 1] \mapsto G$ e $\gamma_1 : [0, 1] \mapsto G$ due cammini da a a b . Si dice che γ_0 e γ_1 sono *omotopi in G* e scrivo $\gamma_0 \stackrel{G}{\sim} \gamma_1$ se esiste $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \mapsto G$ continua tale che

- (a) $\Gamma(0, t) = \gamma_0(t)$ per ogni $t \in [0, 1]$
- (b) $\Gamma(1, t) = \gamma_1(t)$ per ogni $t \in [0, 1]$
- (c) $\Gamma(s, 0) = a$ e $\Gamma(s, 1) = b$ per ogni $s \in [0, 1]$

(TC2) (Teo: indipendenza dell'integrale dal cammino). Sia f una funzione analitica su un aperto G e siano γ_0 e γ_1 due cammini RAT, la cui traccia è contenuta in G . Se γ_0 e γ_1 sono omotopi in G , allora

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f.$$

(TC3) (Def: cammino omotopo a zero). Un cammino è detto *omotopo a zero* se è omotopo ad un cammino costante (notare che un cammino omotopo a zero è banalmente chiuso).

(TC4) (Teo: Teorema di Cauchy). Sia f una funzione analitica su un aperto G e sia γ un cammino RAT, la cui traccia è contenuta in G . Se γ è omotopo a zero in G , allora

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

(TC5) (Def: insieme semplicemente connesso). Un sottoinsieme G di \mathbb{C} (o, più in generale, un spazio topologico) è detto *semplicemente connesso* se è connesso e ogni cammino chiuso in G è omotopo a zero in G .

(TC6) (Cor: teorema di Cauchy per semplicemente connessi). Sia f una funzione analitica su un aperto G semplicemente connesso e sia γ un cammino chiuso, RAT, la cui traccia è contenuta in G . Allora

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

(TC7) (Teo: Esistenza primitiva). Sia G aperto, semplicemente connesso e $f : G \mapsto \mathbb{C}$ analitica. Allora esiste una primitiva F di f su G .

(TC8) (Teo Morera). Sia G una regione in \mathbb{C} , $f : G \mapsto \mathbb{C}$ continua e supponiamo che valga $\int_T f = 0$ per ogni cammino chiuso triangolare tale che $\{T\} \subset G$. Allora f è analitica.

(TC9) (Def: indice di un cammino rispetto a un punto). Se $\gamma : [0, 1] \mapsto \mathbb{C}$ è un cammino chiuso, RAT e $z \in \mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$, l'*indice* di γ rispetto a z è definito come

$$n(\gamma, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dw}{w - z}$$

(TC10) (Proprietà dell'indice). Proprietà dell'indice

- (a) $n(\gamma^{-1}, z) = -n(\gamma, z)$.
- (b) $n(\gamma \cdot \sigma, z) = n(\gamma, z) + n(\sigma, z)$.
- (c) Se $\gamma_1 \stackrel{\mathbb{C} \setminus \{z\}}{\sim} \gamma_2$ allora $n(\gamma_1, z) = n(\gamma_2, z)$.

(TC11) (Teo: formula integrale di Cauchy). Sia G una regione in \mathbb{C} , $f : G \mapsto \mathbb{C}$ analitica. Se γ è un cammino chiuso, RAT, tale che $\gamma \stackrel{G}{\sim} 0$, allora

$$n(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w) dw}{w - z} \quad \forall z \in G \setminus \{\gamma\}.$$

(TC12) (Teo: formula integrale per le derivate). Sotto le stesse ipotesi del punto (TC11), si ha

$$n(\gamma, z) f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w) dw}{(w - z)^{n+1}} \quad \forall z \in G \setminus \{\gamma\}.$$

13 Serie di Laurent

(LAU1) (Espansione in fratti semplici). Siano $p(z)$ e $q(z)$ due polinomi su \mathbb{C} tali che il grado di p sia inferiore al grado di q . Se

$$q(z) = c(z - a_1)^{m_1} \cdots (z - a_s)^{m_s},$$

allora si può scrivere

$$\begin{aligned} \frac{p(z)}{q(z)} &= \frac{A_{1,1}}{(z - a_1)} + \frac{A_{1,2}}{(z - a_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1,m_1}}{(z - a_1)^{m_1}} \\ &+ \frac{A_{2,1}}{(z - a_2)} + \frac{A_{2,2}}{(z - a_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2,m_2}}{(z - a_2)^{m_2}} \\ &+ \cdots \\ &+ \frac{A_{s,1}}{(z - a_s)} + \frac{A_{s,2}}{(z - a_s)^2} + \cdots + \frac{A_{s,m_s}}{(z - a_s)^{m_s}} \end{aligned}$$

in cui $A_{i,j}$ sono opportune costanti (complesse). Esempio:

$$\begin{aligned} \frac{3z^2 + 2z - 5}{(z^2 + 4)^2 (z - 5)^3} &= \frac{3z^2 + 2z - 5}{(z + 2i)^2 (z - 2i)^2 (z - 5)^3} \\ &= \frac{A}{(z + 2i)} + \frac{B}{(z + 2i)^2} + \frac{C}{(z - 2i)} + \frac{B}{(z - 2i)^2} \\ &+ \frac{E}{(z - 5)} + \frac{F}{(z - 5)^2} + \frac{E}{(z - 5)^3} \end{aligned}$$

(LAU2) Sviluppo in serie di Taylor/Laurent di $\frac{1}{a-z}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a-z} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(a - z_0)^{n+1}} && \text{se } |z - z_0| < |a - z_0| \\ \frac{1}{a-z} &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} = - \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(a - z_0)^{n+1}} && \text{se } |z - z_0| > |a - z_0| \end{aligned}$$

(LAU3) Sviluppo in serie di Taylor/Laurent di $\frac{1}{a+z}$

$$\frac{1}{a+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-z_0)^n}{(a+z_0)^{n+1}} \quad \text{se } |z-z_0| < |a+z_0|$$

$$\frac{1}{a+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(a+z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} = \sum_{n=-1}^{-\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-z_0)^n}{(a+z_0)^{n+1}} \quad \text{se } |z-z_0| > |a+z_0|$$

(LAU4) (Def). Sia

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

lo sviluppo in serie di Laurent di una funzione analitica f nell'intorno di una singolarità isolata z_0 di f . La *parte singolare della serie di Laurent* è definita come la serie delle potenze negative, vale a dire

$$\begin{aligned} \text{parte singolare} &= \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z-z_0)^n \\ &= \dots + \frac{a_{-3}}{(z-z_0)^3} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} \end{aligned}$$

(LAU5) (Teorema: sviluppo in serie di Laurent). Sia f analitica su $\text{An}_{r,R}(z_0)$ in cui r, R soddisfano $0 \leq r < R \leq \infty$. Allora:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad z \in \text{An}_{r,R}(z_0)$$

con

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=\rho} \frac{f(w) dw}{(w-z_0)^{n+1}} \quad r < \rho < R$$

(LAU6) (Def). Si dice che la funzione f ha una *singolarità isolata* nel punto z_0 se esiste $R > 0$ tale che f è analitica in $\dot{B}_R(z_0)$.

(LAU7) (Def: classificazione delle singolarità). Sia z_0 una singolarità isolata di f e sia

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n \quad z \in \dot{B}_R(z_0)$$

lo sviluppo di Laurent di f nell'intorno di z_0 . La singolarità è detta

- (a) *eliminabile*, se la parte singolare della SdL è assente
- (b) *un polo di ordine n* , se la parte singolare della SdL contiene un numero finito di termini e si ha

$$a_{-n} \neq 0 \quad a_k = 0 \text{ per ogni } k < -n.$$

(c) *essenziale* se la parte singolare della SdL contiene infiniti termini.

- (LAU8) (1) se $f(z)$ ha uno zero di molteplicità m in z_0 , e $g(z)$ ha uno zero di molteplicità n in z_0 , allora:
- (a) se $m \geq n$, f/g ha una singolarità eliminabile in z_0 .
 - (b) se $m < n$, f/g ha un polo di ordine $n - m$ in z_0 .
- (2) se f ha una singolarità essenziale in z_0 , e g è analitica in z_0 o ha una singolarità eliminabile in z_0 o ha un polo in z_0 , allora $f \pm g$, fg e f/g hanno una singolarità essenziale in z_0 .

14 Residui

(RES1) (Def: residuo). Sia f una funzione analitica su $\dot{B}_R(z_0)$ e sia

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad z \in \dot{B}_R(z_0)$$

il suo sviluppo in serie di Laurent *nell'intorno della singolarità* z_0 . Il *residuo* di f in z_0 è definito come

$$\text{Res}(f, z_0) := a_{-1}.$$

(RES2) (Teorema dei residui). Sia f analitica in $G \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$, in cui z_1, \dots, z_m sono singolarità isolate di f . Sia γ un cammino chiuso, regolare a tratti tale che $\{\gamma\} \cap \{z_1, \dots, z_m\} = \emptyset$ e $\gamma \stackrel{G}{\simeq} 0$. Allora:

$$\int_{\gamma} f = 2\pi i \sum_{k=1}^m n(\gamma, z_k) \text{Res}(f, z_k).$$

(RES3) (Formula per i poli). Se f ha un polo di ordine n in z_0 , allora

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} D^{n-1}[(z - z_0)^n f(z)]$$

(RES4) *Metodo di calcolo*: Sia

$$f(z) = \frac{(g_1(z))^{m_1} (g_2(z))^{m_2} \dots (g_s(z))^{m_s}}{(g_{s+1}(z))^{m_{s+1}} (g_{s+2}(z))^{m_{s+2}} \dots (g_t(z))^{m_t}}$$

in cui le g_i sono funzioni analitiche in $\dot{B}_R(z_0)$ tali che

$$g_i(z) = \mathcal{O}((z - z_0)^{k_i}) \quad \text{per } z \rightarrow z_0.$$

Supponiamo che f abbia un polo di ordine n in z_0 . Allo scopo di calcolare la parte singolare della SdL di f nell'intorno di z_0 è necessario sviluppare ciascuna g_i fino all'ordine $k_i + n - 1$ incluso, vale a dire

$$g_i(z) = \underbrace{c_{k_i} z^{k_i} + c_{k_i+1} z^{k_i+1} + \dots + c_{k_i+n-1} z^{k_i+n-1}}_{n \text{ termini}} + \mathcal{O}((z - z_0)^{k_i+n})$$

Caso particolare: se f ha un polo semplice ($n = 1$), è sufficiente sostituire $g_i(z)$ con il primo termine non nullo del suo sviluppo di Taylor.

(RES5) *Caso particolare del caso particolare:* Se $f(z) = g(z)/h(z)$ in cui g e h sono analitiche, con $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$, allora f ha un polo di ordine 1 in z_0 e si ha

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

(RES6) Se

$$f(z) = \frac{p(z)}{(z - z_0)^m}$$

in cui p è un polinomio di grado $k \leq m - 2$, allora $\operatorname{Res}(f, z_0) = 0$.

(RES7) (Def: Residuo all'infinito). Sia f una funzione analitica su $\operatorname{An}_{R,\infty}(0)$. Si definisce *residuo all'infinito di f* la quantità

$$\operatorname{Res}(f, \infty) := -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2} f(1/z), 0\right).$$

(RES8) (Teo: Residuo all'infinito). Sia f una funzione analitica su $\operatorname{An}_{R,\infty}(0)$ e sia γ un cammino chiuso, RAT, tale che $\{\gamma\} \subset \operatorname{An}_{R,\infty}(0)$. Allora

(1)

$$\int_{\gamma} f = -2\pi i n(\gamma, 0) \operatorname{Res}(f, \infty).$$

(2) Se f ha solo singolarità isolate nei punti z_1, \dots, z_s , allora

$$\sum_{k=1}^s \operatorname{Res}(f, z_k) + \operatorname{Res}(f, \infty) = 0.$$

(3) Se $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$, allora $\int_{\gamma} f = 0$.

15 Tecniche di integrazione

15.1. Notazione (circonferenza e archi di circonferenza)

$$\begin{aligned} C_R(t) &= Re^{it} & t \in [0, 2\pi] \\ C_{R,\alpha,\beta}(t) &= Re^{it} & t \in [\alpha, \beta] \\ C_R^+ &= Re^{it} & t \in [0, \pi] \\ C_R^- &= Re^{-it} & t \in [0, \pi] \end{aligned}$$

15.2. Notazione

$$\int_{\text{archio}} f := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f \quad \gamma_R := [-R, R] \cdot C_R^+$$

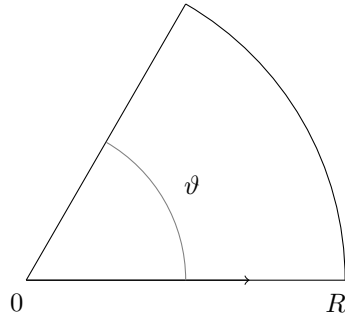



Figura 7: Il cammino a fetta di torta

15.3. Notazione (attenzione questo cammino “gira” in senso orario).

$$\int_{\text{semicircle}} f := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f \quad \gamma_R = [-R, R] \cdot C_R^-$$

15.4. Notazione (cammino a fetta di torta), vedi figura 7

$$\int_{\text{sector}} f := \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f \quad \gamma_R := [0, R] \cdot C_{R,0,\vartheta} \cdot [Re^{i\vartheta}, 0]$$

15.5. Notazione (cammino Pacman)

$$\int_{\text{pacman}} f := \lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{r \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma_{R,r,\varepsilon}} f$$

in cui $\Gamma_{R,r,\varepsilon}$ è il cammino mostrato in figura 8.

(TEC1) Se esiste $R_0 > 0$ tale che f è continua su $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R_0\}$ allora

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f &= 0 & \text{se } \lim_{z \rightarrow \infty} |z f(z)| &= 0 \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^+} f(z) e^{i\lambda z} &= 0 & \text{se } \lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| &= 0 \text{ e } \lambda > 0 \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^-} f(z) e^{i\lambda z} &= 0 & \text{se } \lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| &= 0 \text{ e } \lambda < 0 \end{aligned}$$

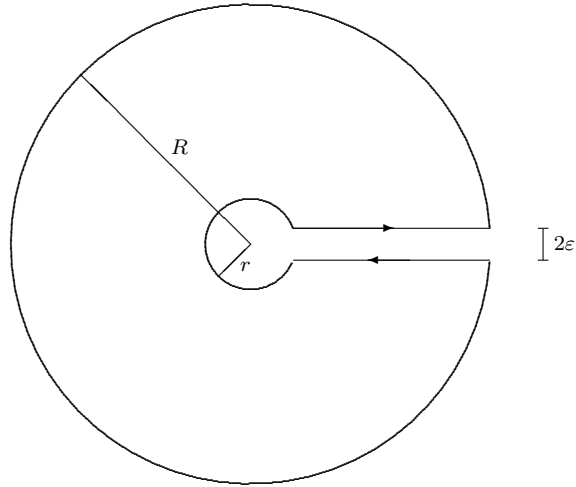


Figura 8: Il cammino Pacman $\Gamma_{R,r,\varepsilon}$

(TEC2) Esempi di funzioni analitiche (A) o continue (C) su $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R_0\}$ (per un R_0 opportuno) tali che $\lim_{z \rightarrow \infty} |zf(z)| = 0$ (nel seguito p e q sono polinomi)

$\frac{p(z)}{q(z)}$	se $\deg q \geq \deg p + 2$	A
$e^{- z }$		C
$\sin^2(1/z)$		A
$1 - \cos(1/z)$		A

(TEC3) Esempi di funzioni per i quali NON vale $\lim_{z \rightarrow \infty} |zf(z)| = 0$


e^{-z^2}	diverge lungo l'asse immaginario
$\frac{\sin(z)}{z^2}$	diverge lungo l'asse immaginario

Osservazione: una funzione intera (non identicamente nulla) non ha alcuna speranza di soddisfare la condizione $\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = 0$, (nè tantomeno la condizione $\lim_{z \rightarrow \infty} |zf(z)| = 0$ che è più forte), in quanto se questa condizione fosse soddisfatta, si otterrebbe che f è limitata e dunque, per il teorema di Liouville, f è costante.


(TEC4) Se f è continua su $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R_0\} \cup \mathbb{R}$ e $\lim_{z \rightarrow \infty} |zf(z)| = 0$, si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{\text{arc}} f(z) dz$$


(TEC5) Se f è pari, continua su $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R_0\} \cup \mathbb{R}_+$ e $\lim_{z \rightarrow \infty} |z f(z)| = 0$

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{\text{arco}} f(z) dz$$



(TEC6) Se $f(z) = g(z^k)$ con $k = 2, 3, 4, \dots$, f è continua su $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R_0\} \cup \mathbb{R}_+$ e $\lim_{z \rightarrow \infty} |z f(z)| = 0$. Sia $\vartheta = 2\pi/k$. Allora:


$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{1 - e^{i2\pi/k}} \int_{\text{arco}} f(z) dz$$


Ad esempio


$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^k + 1} = \frac{1}{1 - e^{i2\pi/k}} \int_{\text{arco}} \frac{dz}{z^k + 1} \quad \vartheta = \frac{2\pi}{k}$$



(TEC7) Se f è continua su $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R_0\} \cup \mathbb{R}$ e $\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = 0$, si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx = \int_{\text{arco}} f(z) e^{-i\lambda z} dz \quad \lambda > 0$$


$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx = \int_{\text{arco}} f(z) e^{-i\lambda z} dz \quad \lambda < 0$$


(TEC8) Se f è continua su $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R_0\} \cup \mathbb{R}$ e $\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = 0$, si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\lambda x) dx = \text{Re} \left[\int_{\text{arco}} f(z) e^{i\lambda z} dz \right] \quad \lambda > 0$$


$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\lambda x) dx = \text{Im} \left[\int_{\text{arco}} f(z) e^{i\lambda z} dz \right] \quad \lambda > 0$$


(TEC9) Dimostrazione di $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

(TEC10) Sia $f = gh$ e supponiamo che

(1) g analitica con singolarità isolate che non si trovano su \mathbb{R}_+ .

- (2) h analitica con un taglio lungo \mathbb{R}_+ .
 (3) $\lim_{z \rightarrow \infty} (zf(z)) = 0$ e $\lim_{z \rightarrow 0} (zf(z)) = 0$.

Allora

$$\int_0^\infty g(x) \Delta h(x) dx = \int_{\bigcirc} g(z) h(z) dz$$

in cui $\Delta h(x)$ è la discontinuità di h quando si attraversa il semiasse reale positivo, vale a dire

$$\Delta h(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [h(x + i\varepsilon) - h(x - i\varepsilon)].$$

(TEC11) Alcuni esempi:

$h(z) = \log_+(z)$	$\Delta h(x) = -2\pi i$
$h(z) = (\log_+(z))^2$	$\Delta h(x) = -4\pi i \log x + 4\pi^2$
$h(z) = \frac{i}{4\pi} (\log_+(z))^2 + \frac{1}{2} \log_+ z$	$\Delta h(x) = \log x$
$h(z) = [z^\alpha]^{(+)}$	$\Delta h(x) = x^\alpha (1 - e^{2\pi i \alpha}) \quad \alpha > -1$

(TEC12) Sia $r(z) = p(z)/q(z)$ una funzione razionale tale che $\deg(q) - \deg(p) = s \geq 2$ e siano z_1, z_2, \dots, z_n gli zeri di $q(z)$. Supponiamo che $z_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ per ogni $k = 1, \dots, n$. Grazie ai punti (TEC10) e (TEC11), si ottengono, ad esempio, le seguenti formule di integrazione

$$\int_0^\infty r(x) dx = \frac{i}{2\pi} \int_{\bigcirc} r(z) \log_+ z dz = - \sum_{k=1}^n \text{Res} (r(z) \log_+ z, z_k)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r(x) x^\alpha dx &= \frac{1}{(1 - e^{i2\pi\alpha})} \int_{\bigcirc} r(z) [z^\alpha]^{(+)} dz && [\alpha \in (-1, s - 1)] \\ &= -\frac{\pi e^{-i\pi\alpha}}{\sin(\pi\alpha)} \sum_{k=1}^n \text{Res} (r(z) [z^\alpha]^{(+)}, z_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r(x) \log x dx &= \int_{\bigcirc} \left[r(z) \left(\frac{i}{4\pi} (\log_+(z))^2 + \frac{1}{2} \log_+ z \right) \right] dz \\ &= \sum_{k=1}^n \text{Res} \left[r(z) \left(-\frac{1}{2} (\log_+(z))^2 + \pi i \log_+ z \right), z_k \right] \end{aligned}$$

16 Spazi metrici

In questa sezione, solo punti contrassegnati con \star

(SM1) \star (Def: spazio metrico).

(SM2) \star (Def: insieme aperto, insieme chiuso). Sia (X, d) uno spazio metrico. Un sottoinsieme $A \subset X$ è detto *aperto in X* se per ogni $x \in A$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \subset A$. Un sottoinsieme $B \subset X$ è detto *chiuso in X* se il suo complemento $B^c = X \setminus B$ è aperto.

(SM3) (Prop: unioni e intersezioni di aperti e chiusi). Proprietà dell'unione e dell'intersezione di una collezione finita o infinita di insiemi aperti o chiusi.

(SM4) \star (Def: successione convergente. Con gli ε). Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $x \in X$. Una successione $(x_k)_{k=1}^\infty$ di elementi di X si dice *convergente ad x* se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \text{ intero positivo tale che } \forall k \geq N \text{ si ha } d(x_k, x) < \varepsilon.$$

(SM5) \star (Def: successione di Cauchy). Sia (X, d) uno spazio metrico. Una successione $(x_k)_{k=1}^\infty$ di elementi di X si dice *di Cauchy* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero positivo N tale che per ogni $k, n \geq N$ si ha $d(x_k, x_n) < \varepsilon$.

(SM6) (Def: punto di aderenza). Sia (X, d) uno spazio metrico e sia A un sottoinsieme di X . Un punto $x \in X$ si dice *punto di aderenza di A* se esiste una successione $(x_k)_{k=1}^\infty$ di elementi di A tale che $x_k \rightarrow x$.

(SM7) \star (Def: punto di accumulazione). Sia (X, d) uno spazio metrico e sia A un sottoinsieme di X . Un punto $x \in X$ si dice *punto di accumulazione (o punto limite) di A* se esiste una successione $(x_k)_{k=1}^\infty$ di elementi di A tale che $x_k \neq x$ e $x_k \rightarrow x$.

(SM8) (Es: punto di aderenza, ma non di accumulazione). Sia $X = \mathbb{R}$ e $A = (0, 1) \cup \{2\}$. Allora il punto 2 è un punto di aderenza di A , ma non è un punto di accumulazione. I punti 0 e 1 sono sia punti di aderenza che punti di accumulazione.

(SM9) (Def: chiusura di un insieme). $\bar{A} := \{x \in X : x \text{ è un punto di aderenza di } A\}$.

(SM10) (Def: parte interna di un insieme). $A^\circ := \{x \in A : \exists \varepsilon > 0, B_\varepsilon(x) \subset A\}$.

(SM11) \star (Prop: Caratterizzazione di un insieme chiuso tramite successioni convergenti). A è chiuso in (X, d) se e solo se vale l'implicazione

$$(x_n \in A \text{ e } x_n \rightarrow x \in X) \Rightarrow x \in A$$

(vale a dire A contiene tutti i suoi punti di aderenza).

(SM12) \star (Def: densità). Sia (X, d) uno spazio metrico e siano A e B due sottoinsiemi di X . L'insieme A si dice *denso in B* se $\bar{A} \supset B$.

(SM13) \star (Condizione equivalente alla densità. Con gli ε). A è denso in B se e solo se $\forall x \in B$ e $\forall \varepsilon > 0$ esiste $y \in A$ tale che $d(x, y) < \varepsilon$.

- (SM14) (Condizione equivalente alla densità. Con le successioni convergenti). A è denso in B se e solo se $\forall x \in B$ esiste una successione $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ di elementi di A tale che $x_n \rightarrow x$.
- (SM15) \star (Def: completezza). Uno spazio metrico (X, d) si dice *completo* se ogni successione di Cauchy è convergente in X .
- (SM16) (Prop: completezza per sottoinsiemi di uno spazio metrico completo). Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $Y \subset X$. Lo spazio metrico (Y, d) è completo se e solo se Y è chiuso in X .
- (SM17) \star (Def: funzione continua. Con le successioni). Siano (X, d) e (Y, ρ) due spazi metrici. Una funzione $f : X \mapsto Y$ si dice *continua* se vale l'implicazione

$$x_n \rightarrow x \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x).$$

- (SM18) (Def: funzione continua. Con gli ε). Siano (X, d) e (Y, ρ) due spazi metrici. Una funzione $f : X \mapsto Y$ si dice *continua* se per ogni $x \in X$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $d(y, x) < \delta$ allora $\rho(f(y), f(x)) < \varepsilon$
- (SM19) \star Def: funzione uniformemente continua fra due spazi metrici.
- (SM20) Def: funzione Lipschitz fra due spazi metrici.
- (SM21) \star Def: convergenza puntuale ed uniforme per una successione di funzioni $f_n : X \rightarrow Y$.
- (SM22) \star (Teo: limite di funzioni continue è continuo). Se una successione di funzioni continue $f_n : X \rightarrow Y$ converge uniformemente alla funzione $f : X \rightarrow Y$, allora f è continua.
- (SM23) (Teo: Test M di Weierstrass). Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ una successione di funzioni tali che

- (a) $|f_n(x)| \leq M_n$ per ogni $x \in X$
 (b) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$.

Allora le serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ è uniformemente convergente.

17 Spazi vettoriali normati

In questa sezione, solo punti contrassegnati con \star

- (SV1) \star (Definizione di spazio vettoriale).
- (SV2) (Prop). Un sottoinsieme W di uno spazio vettoriale V è uno spazio vettoriale se e solo se è chiuso rispetto alla somma e alla moltiplicazione per gli scalari, vale a dire se e solo se valgono le implicazioni

$$u, v \in W \Rightarrow u + v \in W \qquad v \in W, \alpha \in \mathbb{F} \Rightarrow \alpha v \in W.$$

- (SV3) \star (Definizione di norma in uno spazio vettoriale).

(SV4) ★ (Distanza associata ad una norma). Se $\|\cdot\|$ è una norma sullo spazio vettoriale V , allora $d(v, w) := \|v - w\|$ è una distanza.

(SV5) (Disuguaglianza di Hölder per le successioni e per le funzioni). Per ogni $p \geq 1$ e q tale che $1/p + 1/q = 1$ si ha:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leq \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right]^{1/p} \left[\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q \right]^{1/q}$$

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)g(x)| dx \leq \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right]^{1/p} \left[\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^q dx \right]^{1/q}$$

(SV6) (Disuguaglianza di Minkowski per le successioni e per le funzioni). Per ogni $p \geq 1$ si ha:

$$\left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p \right]^{1/p} \leq \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right]^{1/p} + \left[\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p \right]^{1/p}$$

$$\left[\int_{\mathbb{R}} |f(x) + g(x)|^p dx \right]^{1/p} \leq \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right]^{1/p} + \left[\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^p dx \right]^{1/p}$$

(SV7) (Def: spazi di successioni). Definizione di ℓ_{∞} , ℓ_0 , ℓ_p , ℓ_f .

(SV8) ★ (Def: spazi di funzioni). Definizione di $C_b(\mathbb{R})$, $C_0(\mathbb{R})$, $C_p(\mathbb{R})$, $C_c(\mathbb{R})$, $C^m(\mathbb{R})$.

(SV9) ★ (Def: norma p per successioni e funzioni).

$$\|x\|_p := \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right]^{1/p} \quad \|f\|_p := \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right]^{1/p} \quad p \geq 1$$

(SV10) ★ (Def: norma uniforme per le funzioni). $\|f\|_u := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

(SV11) (Inclusioni fra i vari spazi).

$$\ell_f \subset \ell_p \subset \ell_0 \subset \ell_{\infty} \subset \mathbb{R}^{\infty}$$

$$C_c(\mathbb{R}) \subset C_0(\mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$$

$$C_c(\mathbb{R}) \subset C_p(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$$

$$C_p(\mathbb{R}) \not\subset C_b(\mathbb{R})$$

(SV12) (Def). Una successione di successioni $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ si dice *convergente puntualmente* alla successione x se converge ad x componente per componente, cioè se

$$\text{per ogni } k \in \mathbb{N}^* \text{ si ha } \lim_{n \rightarrow \infty} x_k^{(n)} = x_k.$$

(SV13) (Distanza associata alla convergenza puntuale). Si definisca, per $x, y \in \mathbb{R}^{\infty}$,

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}.$$

Allora

- (1) d è una distanza su \mathbb{R}^∞ .
 (2) La successione $(x^{(n)})$ di elementi di \mathbb{R}^∞ converge puntualmente $x \in \mathbb{R}^\infty$ se e solo se $d(x^{(n)}, x) \rightarrow 0$.

(SV14) ★ (Def). Insiemi di vettori $(u_\alpha)_{\alpha \in I}$ linearmente dipendenti o indipendenti.

(SV15) (Def). Dimensione di uno spazio vettoriale.

(SV16) ★ (Def: sottospazio generato). Il *sottospazio generato* da un insieme di vettori $(u_\alpha)_{\alpha \in I}$ nello spazio vettoriale V si denota con $\text{span}\{u_\alpha : \alpha \in I\}$ ed è definito come l'insieme di tutti i vettori che possono essere espressi come *combinazione lineare finita* degli u_α , vale a dire quei vettori u che si possono scrivere come

$$u = c_1 u_{\alpha_1} + \cdots + c_n u_{\alpha_n} \quad n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in I$$

(SV17) (Esempio di sottospazio generato). Sia

$$e^{(k)} := (0, 0, \dots, 0, \underset{(k)}{1}, 0, 0, \dots)$$

Allora $\text{span}\{(e^{(k)})_{k=1}^\infty\} = \ell_f$.

(SV18) (Def: insieme completo di vettori). Un insieme di vettori $(u_\alpha)_{\alpha \in I}$ in uno spazio vettoriale normato $(V, \|\cdot\|)$ è detto *completo* se $\text{span}\{u_\alpha : \alpha \in I\}$ è denso in V , vale a dire se

$$\overline{\text{span}\{u_\alpha : \alpha \in I\}} = V.$$

(SV19) ★ (Condizione equivalente alla completezza per un sistema di vettori. Con gli ε). Un insieme di vettori (u_α) è completo in V se e solo se vale la seguente condizione: per ogni $v \in V$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una combinazione lineare finita degli u_α

$$u = c_1 u_{\alpha_1} + \cdots + c_n u_{\alpha_n}$$

tale che $\|u - v\| < \varepsilon$.

(SV20) (Def). Base di uno SVN.

(SV21) (Prop). Nello spazio vettoriale normato $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ valgono le identità

$$\overline{\ell_f} = \ell_0 \qquad \overline{\ell_0} = \ell_0.$$

(SV22) ★ (Def). Uno *spazio di Banach* è uno spazio vettoriale normato completo.

(SV23) Esempi di spazi di Banach ($p \geq 1$):

$$\begin{array}{lll} (\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty) & (\ell_0, \|\cdot\|_\infty) & (\ell_p, \|\cdot\|_p) \\ (C_b(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u) & (C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u) & \end{array}$$

(SV24) Esempi di SVN non completi ($p \geq 1$):

$$\begin{array}{llll} (\ell_p, \|\cdot\|_\infty) & (\ell_f, \|\cdot\|_\infty) & (\ell_f, \|\cdot\|_p) & \\ (C_p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p) & (C_p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u) & (C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u) & (C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p) \end{array}$$

- (SV25) \star (Def). Un insieme X è detto *numerabile* se esiste una corrispondenza biunivoca fra X e \mathbb{N} .
- (SV26) (Prop). (a) Il prodotto cartesiano di due insiemi numerabili è numerabile. (b) Un'unione numerabile di insiemi finiti o numerabili è numerabile, vale a dire se A_1, A_2, A_3, \dots sono numerabili allora la loro unione $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ è anch'essa numerabile.
- (SV27) \star (Prop). Sia $X = \{0, 1\}^{\infty}$ l'insieme di tutte le successioni di zeri e uni. X non è numerabile.
- (SV28) (Prop). \mathbb{R} non è numerabile.
- (SV29) \star (Def: spazio metrico separabile). Uno spazio metrico (X, d) è detto *separabile* se esiste un insieme numerabile $Y \subset X$ tale che Y è denso in X .

18 Spazi di Hilbert

In questa sezione, solo punti contrassegnati con \star

In questa sezione $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ è uno spazio euclideo.

- (SH1) \star (Def: definizione di prodotto scalare nel caso reale o complesso).
- (SH2) \star (Prop: disuguaglianza di Cauchy–Schwarz).
- (SH3) \star (Come ottenere una norma a partire da un prodotto scalare). Se $v \in V$, definisco $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$.
- (SH4) (Continuità del prodotto scalare). Se (u_n) e (v_n) sono 2 successioni in V ed esistono i limiti $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \in V$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v \in V$, allora, per ogni vettore $w \in V$ si ha

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_n, w \rangle &= \langle \lim_{n \rightarrow \infty} u_n, w \rangle = \langle u, w \rangle \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_n, v_n \rangle &= \langle \lim_{n \rightarrow \infty} u_n, \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \rangle = \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

- (SH5) \star (Spazi euclidei pesati). Sia $\mu : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una funzione continua e positiva. Allora posso definire lo spazio

$$C_2(\mathbb{R}, \mu dx) = \left\{ f \in C(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \mu(x) dx < \infty \right\}$$

Questo è uno spazio vettoriale sul quale posso definire il prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) \mu(x) dx.$$

- (SH6) (Def: complemento ortogonale di un insieme di vettori).
- (SH7) (Proprietà del complemento ortogonale).
- (a) X^{\perp} è un sottospazio chiuso

(b) se $X \subset Y$ allora $X^\perp \supset Y^\perp$

(c) $X^\perp = \overline{X}^\perp = (\text{span}(X))^\perp = (\overline{\text{span}(X)})^\perp$.

(SH8) (Esempio: un sottospazio W di ℓ_2 tale che $W \neq \ell_2$, ma $W^\perp = \{0\}$).

(SH9) \star (Def: sistema ortogonale, ortonormale).

(SH10) \star (Def: base ortogonale, ortonormale).

(SH11) \star (Procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt).

(SH12) \star (Condizioni per l'esistenza di una base ortogonale in uno spazio euclideo).

(SH13) (Prop: i coefficienti di Fourier sono ottimali). Sia $(u_k)_{k=1}^\infty$ un sistema ortonormale in V e sia $v \in V$. Poniamo

$$c_k := \langle v, u_k \rangle \quad S_n := \sum_{k=1}^n c_k u_k \quad S_n^\alpha := \sum_{k=1}^n \alpha_k u_k.$$

in cui $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ sono dei coefficienti arbitrari. Allora $\|v - S_n\| \leq \|v - S_n^\alpha\|$.

(SH14) (Prop: disuguaglianza di Bessel). Sia $(u_k)_{k=1}^\infty$ un sistema ortonormale in V e sia $v \in V$. Se $c_k := \langle v, u_k \rangle$ sono i coefficienti di Fourier di v rispetto al sistema ortonormale $(u_k)_{k=1}^\infty$, allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|v\|^2.$$

(SH15) (Equivalenza fra l'uguaglianza di Parseval e la possibilità di scrivere un vettore v come combinazione lineare infinita di un sistema ortonormale).

(SH16) \star (Prop: un vettore è una combinazione lineare infinita dei vettori di base). Se $(u_k)_{k=1}^\infty$ è una base ortonormale dello spazio euclideo V , allora per ogni $v \in V$ si ha $v = \sum_{k=1}^\infty c_k u_k$ in cui i c_k sono i coefficienti di Fourier di v , vale a dire $c_k = \langle v, u_k \rangle$.

(SH17) (Teorema sull'esistenza e l'unicità della proiezione ortogonale su un sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert separabile).

(SH18) (Caratterizzazione della proiezione ortogonale). Se W è un sottospazio chiuso dello spazio di Hilbert V , allora la proiezione ortogonale di un vettore $v \in V$ sul sottospazio W è univocamente definita dalle due condizioni: (1) $\pi_W v \in W$ e (2) $(v - \pi_W v) \in W^\perp$.

(SH19) (Prop: doppio complemento ortogonale). Se W è un sottospazio dello spazio di Hilbert V , allora si ha $(W^\perp)^\perp = \overline{W}$.

(SH20) \star (Polinomi di Hermite)

(a) Def: $H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} D^n(e^{-x^2})$

(b) Formula di ricorrenza: $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$.

(c) Equazione differenziale: $H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$.

- (d) Ortogonalità: $\int_{\mathbb{R}} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{n,m}$.
- (e) Funzioni di Hermite: $\psi_n(x) := A_n e^{-x^2/2} H_n(x)$ in cui $A_n = (\sqrt{\pi} 2^n n!)^{-1/2}$.
- (f) Le funzioni di Hermite $(\psi_n)_{n=0}^{\infty}$ sono una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare canonico) negli spazi $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $C_2(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$.
- (g) ψ_n soddisfa l'equazione di Schrödinger dell'oscillatore armonico, data da (accatagliati a parte)

$$\left[-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2}{2}\right] \psi_n(x) = \lambda \psi_n(x). \quad \text{con } \lambda = n + \frac{1}{2}.$$

19 Operatori lineari

Questa sezione non è in programma

(OL1) (Def: operatore lineare).

(OL2) (Def: norma di un operatore limitato). Siano V e Z due spazi vettoriali normati. Se T è un operatore lineare limitato da V in Z , la *norma* di T è definita come

$$\|T\| := \sup_{x \in V: \|x\|_V \leq 1} \|Tx\|_Z = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Z}{\|x\|_V}.$$

(OL3) (Prop: equivalenza fra limitatezza e continuità di un operatore lineare).

(OL4) (Def: nucleo e immagine di un operatore lineare. $\text{Ker } T$, $\text{Ran } T$).

(OL5) (Prop: proprietà di nucleo e immagine). Sia $T \in \mathcal{L}(V, Z)$. Allora: (1) Il nucleo di T è un sottospazio chiuso di V . (2). L'immagine di T è un sottospazio di Z .

(OL6) (Caso finito dimensionale: matrice associata ad un operatore lineare T). Se $T \in \mathcal{L}(V, Z)$, $(e^{(i)})_{i=1}^n$ è una base di V e $(\tilde{e}^{(i)})_{i=1}^m$ è una base di Z , allora esiste un'unica matrice $m \times n$ A tale che

$$Te^{(k)} = \sum_{i=1}^m \tilde{e}^{(i)} A_{ik}$$

Se Z è uno spazio euclideo e la base $(\tilde{e}^{(i)})_{i=1}^m$ è ortonormale, allora si ha

$$A_{ik} := \langle Te^{(k)}, \tilde{e}^{(i)} \rangle.$$

(OL7) (Azione della matrice associata ad un operatore lineare T sulle componenti). Se $v = \sum_{i=1}^n v_i e^{(i)}$ e $w = Tv = \sum_{i=1}^m w_i \tilde{e}^{(i)}$, allora

$$w_i = (Tv)_i = \sum_{k=1}^n A_{ik} v_k$$

(OL8) (Def: operatori con nucleo integrale). Se V è uno spazio vettoriale di funzioni e T è un operatore lineare su V , si dice che T possiede un nucleo integrale se esiste una funzione $K(\cdot, \cdot)$ tale che

$$(Tf)(x) = \int K(x, y) f(y) dy.$$

(OL9) (Def: seminorma). Una *seminorma* su uno spazio vettoriale V è un'applicazione $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

- (a) $\|v\| \geq 0$, per ogni $v \in V$
- (b) $\|cu\| = |c| \|u\|$ per ogni $c \in \mathbb{R} (\mathbb{C})$, $u \in V$.
- (c) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ per ogni $u, v \in V$.

(In altre parole differisce da una norma in quanto si può avere $\|v\| = 0$ con $v \neq 0$).

(OL10) (Def: spazio di Schwartz delle funzioni C^∞ rapidamente decrescenti). Data $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ definisco le seminorme

$$\|f\|_{n,k} := \|x^n D^k f\|_u = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^n f^{(k)}(x)| \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Lo spazio di Schwartz o anche spazio delle funzioni C^∞ rapidamente decrescenti è definito come

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \forall n, k \in \mathbb{N}, \|f\|_{n,k} < \infty\}.$$

In altre parole $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ se è C^∞ e se f e tutte le sue derivate vanno a zero all'infinito più velocemente dell'inverso di qualsiasi potenza.

(OL11) (Es: funzioni appartenenti a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$). Esempio: se $p(x)$ è un polinomio allora la funzione $f(x) := p(x) e^{-x^2}$ appartiene allo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(OL12) (Def). Se $p \in [1, \infty)$ si denota con $L_p(\mathbb{R})$ (o, più comunemente con $L^p(\mathbb{R})$) il completamento dello spazio vettoriale normato $(C_p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$. Per definizione di completamento $C_p(\mathbb{R})$ è denso in $L_p(\mathbb{R})$.

(OL13) (Teo). $S(\mathbb{R})$ è denso in $C_p(\mathbb{R})$, e quindi anche in $L_p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1, \infty)$.

(OL14) (Disuguaglianza sulla norma del prodotto di operatori). Se $S \in \mathcal{L}(V, W)$ e $T \in \mathcal{L}(W, Z)$ allora

$$\|TS\| \leq \|T\| \|S\|$$

(OL15) (Def: commutatore). $[S, T] := ST - TS$.

(OL16) (Prop: condizione per la convergenza di una serie di potenze di operatori in uno spazio di Banach).

(OL17) (Prop: condizione per l'esistenza dell'inverso di $(I - A)$ e sua espressione esplicita come serie di potenze).

(OL18) (Def). Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$. La matrice *hermitiana coniugata* (o *aggiunta*) della matrice A si denota con A^* ed è definita come $(A^*)_{ij} = \overline{A_{ji}}$.

(OL19) (Def). Una matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ è detta *hermitiana* (o *autoaggiunta*) se $A^* = A$.

(OL20) (Def). Una matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ è detta *unitaria* se $A^*A = AA^* = I$.

(OL21) (Teorema spettrale finito dimensionale). Se $A \in M_n(\mathbb{C})$ è hermitiana, allora esiste una base ortogonale di \mathbb{C}^n costituita da autovettori di A .

- (OL22) (Def: operatore aggiunto di un operatore lineare T).
- (OL23) (Def: operatore autoaggiunto).
- (OL24) (Prop: proprietà dell'operatore aggiunto).
- (OL25) (Prop: relazioni fra il nucleo e l'immagine di T e T^*).
- (OL26) (Def: proiezioni ortogonali).
- (OL27) (Prop: proprietà delle proiezioni ortogonali).
- (OL28) (Def: autovalore, spettro puntuale, spettro continuo, insieme risolvente, risolvente).
- (OL29) (Prop: lo spettro è chiuso). Lo spettro di un operatore lineare limitato su uno spazio di Banach è chiuso in \mathbb{C} .
- (OL30) (Prop: localizzazione dello spettro all'interno di un disco). Se V è uno spazio di Banach e $T \in \mathcal{L}(V)$, allora lo spettro di T è contenuto nel disco chiuso di centro 0 e raggio $\|T\|$.
- (OL31) (Prop: proprietà dello spettro degli operatori autoaggiunti).
- (OL32) (Prop: condizione sufficiente per $\lambda \in \sigma(T)$). Sia T un operatore lineare sullo spazio di Banach V e sia $\lambda \in \mathbb{C}$. Supponiamo che esista una successione $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ di elementi di V tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|Tv_n - \lambda v_n\|}{\|v_n\|} = 0.$$

Allora $\lambda \in \sigma(T)$.

- (OL33) (Esempio). Come si può usare il criterio del punto precedente per dimostrare che l'insieme $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ fa parte dello spettro continuo di ϑ_- che agisce in ℓ_2 : si prendono "autovettori" di norma infinita e si troncano, trasformandoli in "autovettori approssimati" di norma finita.
- (OL34) (Operatori di "creazione" e "distruzione"). Supponiamo che gli operatori lineari T ed A soddisfino la relazione di commutazione $[T, A] = \mu A$ per un qualche $\mu \in \mathbb{C}$. Sia $u \neq 0$ un autovettore di T con autovalore λ , vale a dire $Tu = \lambda u$. Allora ci sono 2 possibilità per Au : (1) Au è un autovettore di T con autovalore $\lambda + \mu$, oppure (2) $Au = 0$.

20 Serie di Fourier

(SF1) (Sviluppo in serie di Fourier). Per ogni $f \in L_2[-\pi, \pi]$ si ha

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

in cui

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

Inoltre vale l'identità di Parseval

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [|a_k|^2 + |b_k|^2]$$

(SF2) (Sviluppo in serie di Fourier degli esponenziali). Per ogni $f \in L_2[-\pi, \pi]$ si ha

$$f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

in cui

$$c_k = \frac{\langle f, e_k \rangle}{\|e_k\|_2^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

(SF3) (Sviluppo in serie di Fourier di soli coseni in $[0, \ell]$). Per ogni $f \in L_2[0, \ell]$ si ha

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)$$

in cui

$$a_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) dx$$

(SF4) (Sviluppo in serie di Fourier di soli seni in $[0, \ell]$). Per ogni $f \in L_2[0, \ell]$ si ha

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)$$

in cui

$$b_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) dx$$

(SF5) (Def: funzioni DAT). Una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ è detta *differenziabile a tratti* (DAT) se f ed f' sono continue a tratti in $[a, b]$. In altre parole f è differenziabile a tratti in $[a, b]$ se esiste un insieme finito di punti $\alpha_i \in [a, b]$, $i = 0, \dots, n$ tali che

- (a) $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n = b$.
- (b) f è differenziabile con derivata continua in ciascun intervallo aperto (α_{i-1}, α_i) .
- (c) Esistono e sono finiti i limiti

$$\begin{array}{cccccc} \lim_{x \rightarrow \alpha_0^+} f(x), & \lim_{x \rightarrow \alpha_1^-} f(x), & \lim_{x \rightarrow \alpha_1^+} f(x), & \dots, & \lim_{x \rightarrow \alpha_n^-} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow \alpha_0^+} f'(x), & \lim_{x \rightarrow \alpha_1^-} f'(x), & \lim_{x \rightarrow \alpha_1^+} f'(x), & \dots, & \lim_{x \rightarrow \alpha_n^-} f'(x) \end{array}$$

(SF6) (Teo: convergenza puntuale della serie di Fourier). Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione 2π -periodica continua a tratti e sia S_n la somma parziale n -sima di Fourier di f . Se $x \in \mathbb{R}$ è un punto in cui esistono sia la derivata destra $f'_+(x)$ che quella sinistra $f'_-(x)$ di f , si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f \text{ è continua in } x \\ \frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)] & \text{nel caso generale.} \end{cases}$$

(SF7) (Convergenza puntuale della serie di Fourier per le funzioni DAT periodiche). Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione 2π -periodica differenziabile a tratti e sia S_n la somma parziale n -sima di Fourier di f . Allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f \text{ è continua in } x \\ \frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)] & \text{nel caso generale.} \end{cases}$$

(SF8) (Convergenza puntuale della serie di Fourier per le funzioni DAT definite su $[-\pi, \pi]$). Sia $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione differenziabile a tratti e sia S_n la somma parziale n -sima di Fourier di f . Allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } |x| < \pi \text{ e } f \text{ è continua in } x \\ \frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)] & \text{se } |x| < \pi \text{ in generale} \\ \frac{1}{2} [f(\pi) + f(-\pi)] & \text{se } x = \pm\pi. \end{cases}$$

(SF9) (Relazione fra i coefficienti di Fourier di f e quelli di f'). Sia $f \in C[-\pi, \pi]$ con f' continua a tratti. Siano a_k, b_k i coefficienti di Fourier di f e a'_k, b'_k i coefficienti di Fourier di f' . Allora

$$(20.1) \quad a_k = -b'_k/k \quad b_k = (a'_k + (-1)^{k+1} a'_0)/k \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Se inoltre vale $f(\pi) = f(-\pi)$ si ha

$$(20.2) \quad a_k = -b'_k/k \quad b_k = a'_k/k \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

(SF10) (Ricetta 1). Sia $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ e sia F una primitiva di f . Sia f è CAT, la SdF di F si ottiene nel modo seguente:

- (1) integrare la SdF di f termine a termine;
- (2) nel termine $a_0 x/2$ (se presente), sostituire x con la SdF.

$$x \longrightarrow 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin(kx)}{k}$$

- (3) aggiungere $A_0/2$.

(SF11) (Ricetta 2). Sia $f : [-\pi, \pi]$ continua con f' continua a tratti. La SdF di f' si ottiene nel modo seguente:

- (1) derivare la SdF di f termine a termine;
- (2) aggiungere $\frac{f(\pi) - f(-\pi)}{2\pi} (1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos(kx))$.

(SF12) Soluzione dell'equazione del calore in una dimensione nell'intervallo $[0, \ell]$ con condizioni al bordo vario tipo.

21 Trasformata di Fourier

21.1. In questa sezione $L_p(\mathbb{R}) = L_p(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, vale a dire tutte le funzioni sono *a priori* a valori complessi.

(TF1) Definizione di trasformata di Fourier per funzioni $f \in L_1(\mathbb{R})$.

(TF2) (Teo). Se $f \in L_1(\mathbb{R})$ allora $\mathcal{F}(f) \in C_0(\mathbb{R})$.

(TF3) (Prop: Proprietà elementari della trasformata di Fourier). Siano $f, h \in L_1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. Allora

- (1) $\mathcal{F}[\alpha f + \beta h] = \alpha \mathcal{F}[f] + \beta \mathcal{F}[h]$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
- (2) $\mathcal{F}[f](\lambda) = \overline{\mathcal{F}[f](-\lambda)}$.
- (3) Se f è reale $\mathcal{F}[f](\lambda) = \overline{\mathcal{F}[f](-\lambda)}$.
- (4) Se f è reale pari $\mathcal{F}[f]$ è reale e pari.
- (5) Se f è reale dispari $\mathcal{F}[f]$ è immaginaria pura dispari.

(TF4) (Esempio di traslazioni e dilatazioni di una funzione). Sia γ la funzione gaussiana, data da $\gamma(x) := e^{-x^2}$. Sia γ_1 una gaussiana con picco alto il triplo di γ , largo il doppio e centrato nel punto $x = 9$. Allora

$$\gamma_1(x) = 3\gamma((x-9)/2).$$

(TF5) (Lista di alcune proprietà della TdF. Alcune sono conseguenze di risultati che appaiono successivamente). Sia $f \in L_1(\mathbb{R})$ e sia $\hat{f} := \mathcal{F}[f]$. Allora si ha, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$,

- (1) $\mathcal{F}[f(-x)](\lambda) = \hat{f}(-\lambda)$
- (2) $\mathcal{F}[f(x-a)](\lambda) = e^{-i\lambda a} \hat{f}(\lambda)$
- (3) $\mathcal{F}[f(x) e^{iax}](\lambda) = \hat{f}(\lambda - a)$
- (4) $\mathcal{F}[f(x) \cos(ax)](\lambda) = \frac{1}{2} [\hat{f}(\lambda + a) + \hat{f}(\lambda - a)]$
- (5) $\mathcal{F}[f(x) \sin(ax)](\lambda) = \frac{1}{2i} [\hat{f}(\lambda - a) - \hat{f}(\lambda + a)]$
- (6) $\mathcal{F}[f(ax)](\lambda) = \frac{1}{|a|} \hat{f}(\lambda/a)$ se $a \neq 0$
- (7) $\mathcal{F}[f(a(x-b))](\lambda) = \frac{1}{|a|} e^{-i\lambda b} \hat{f}(\lambda/a)$ se $a \neq 0$
- (8) $\mathcal{F}[f(ax-b)](\lambda) = \frac{1}{|a|} e^{-i\lambda(b/a)} \hat{f}(\lambda/a)$ se $a \neq 0$.
- (9) $\mathcal{F}[D^k f](\lambda) = (i\lambda)^k \hat{f}(\lambda)$.
- (10) $\mathcal{F}[x^k f](\lambda) = i^k (D^k \hat{f})(\lambda)$.
- (11) $\mathcal{F}[\hat{f}(s)](t) = 2\pi f(-t)$.
- (12) $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g)$

(TF6) (Primo teorema sul legame fra differenziabilità e andamento all'infinito). Sia $f \in C^{p-1}(\mathbb{R})$ con $f^{(p)}$ continua a tratti e assumiamo che le funzioni $f, f', f'', \dots, f^{(p)}$ appartengano tutte a $L_1(\mathbb{R})$. Allora

- (1) per ogni $k = 1, \dots, p$ si ha $\mathcal{F}(f^{(k)})(\lambda) = (i\lambda)^k \mathcal{F}(f)$.

(2) $\hat{f}(\lambda)$ tende a zero, quando $\lambda \rightarrow \infty$ più velocemente di $1/\lambda^p$, vale a dire

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^p \hat{f}(\lambda) = 0.$$

(TF7) (Secondo teorema sul legame fra differenziabilità e andamento all'infinito). Sia $f \in L_1(\mathbb{R})$ tale che le funzioni $xf, x^2f, \dots, x^q f$ appartengano tutte ad $L_1(\mathbb{R})$. Allora $\hat{f} \in C^q(\mathbb{R})$. Inoltre

$$D^k \hat{f} = \mathcal{F}[(-ix)^k f] \quad k = 1, \dots, q.$$

(TF8) Definizione dello spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ delle funzioni di Schwartz (o funzioni *rapidamente decrescenti*).

(TF9) (Prop: invarianza di $\mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ sotto l'azione della TdF). Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ allora $\mathcal{F}[f] \in \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$.

(TF10) (Def: antitrasformata di Fourier). Se $g \in L_1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ si definisce *antitrasformata di Fourier* di g e si indica con \check{g} , la funzione

$$\mathcal{F}^a(g)(t) = \check{g}(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(s) e^{ist} ds \quad t \in \mathbb{R}.$$

(TF11) (Teorema di inversione). Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^a \circ \mathcal{F} &= \mathcal{F} \circ \mathcal{F}^a = I \quad \text{vale a dire} \quad \mathcal{F}^a = \mathcal{F}^{-1} \\ \mathcal{F}^{-1} &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F} \circ P = \frac{1}{2\pi} P \circ \mathcal{F} \\ \mathcal{F} \circ \mathcal{F} &= 2\pi P \end{aligned}$$

(TF12) (Esempio di utilizzo del teorema di inversione). Sapendo che

$$(21.1) \quad \mathcal{F} [H(s)e^{-\alpha s}] (t) = \frac{1}{\alpha + it} \quad \alpha > 0$$

posso ottenere la trasformata di Fourier di $1/(\alpha + it)$ senza doverla calcolare. Infatti, dalla (21.1) si ottiene

$$H(s)e^{-\alpha s} = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{\alpha + it} \right] (s).$$

Quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left[\frac{1}{\alpha + it} \right] (s) &= 2\pi \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{\alpha + it} \right] (-s) \\ &= 2\pi H(-s) e^{\alpha s} \end{aligned}$$

(TF13) (Teorema di Plancherel) Se $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ e $\langle f, g \rangle$ denota il prodotto scalare canonico, si ha

$$\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f\|_2 \quad \langle \mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g) \rangle = 2\pi \langle f, g \rangle$$

(TF14) Definizione del prodotto di convoluzione $f * g$.

(TF15) (Prop: proprietà del prodotto di convoluzione).

(a) $f * g = g * f$

(b) $(f * g) * h = f * (g * h) =: f * g * h$.

(c) Se $a \neq 0$ e $\tilde{f}(x) = f(ax)$, $\tilde{g}(x) := g(ax)$, allora $(\tilde{f} * \tilde{g})(x) = \frac{1}{|a|}(f * g)(ax)$

(TF16) (Teo: convoluzione e trasformata di Fourier). Siano $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ limitate. Allora

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g).$$

(TF17) (Il principio di indeterminazione di H.) Sia $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tale che $\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx = 1$. Sia $\varphi(\lambda) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}[\psi](\lambda)$. Allora:

(1) $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(\lambda)|^2 d\lambda = 1$.

(2) Interpretando $|\psi(x)|^2$ e $|\varphi(\lambda)|^2$ come densità di probabilità associate rispettivamente alle variabili x e λ , si ha $\sigma_x \sigma_\lambda \geq 1/2$.

22 Distribuzioni

(DIS1) (Def: funzioni localmente integrabili). Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ si dice *localmente integrabile* se:

(a) f ha discontinuità isolate.

(b) per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, si ha che l'integrale (possibilmente improprio) $\int_a^b |f(x)| dx$ è finito.

(DIS2) (Def: funzioni continue a tratti). Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ si dice *continua a tratti* se

(a) f ha discontinuità isolate

(b) per ogni punto di discontinuità u , esistono e sono finiti i limiti

$$f(u^-) := \lim_{x \rightarrow u^-} f(x) \quad f(u^+) := \lim_{x \rightarrow u^+} f(x)$$

(DIS3) (Prop). Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è continua a tratti allora è localmente integrabile.

(DIS4) (Def). $\mathcal{K} = C_c^\infty(\mathbb{R})$ è l'insieme delle funzioni su \mathbb{R} (a valori reali o complessi a seconda del contesto) infinitamente differenziabili a supporto compatto.

(DIS5) (Def). Convergenza nello spazio \mathcal{K} .

(DIS6) (Def). Una *distribuzione su \mathcal{K}* è un funzionale lineare continuo $F : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C}$, vale a dire un funzionale lineare tale che

$$\text{se } f_n \xrightarrow{\mathcal{K}} f \text{ allora } F(f_n) \rightarrow F(f).$$

(DIS7) (Prop). Sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ localmente integrabile e sia $\varphi_g : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C}$ definita come

$$\varphi_g(f) := \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x) dx \quad f \in \mathcal{K}.$$

Allora φ_g è una distribuzione.

(DIS8) (Def: delta di Dirac). $\delta_{x_0}(f) := f(x_0)$.

(DIS9) (Delta di Dirac nella notazione “impropria”).

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0).$$

(DIS10) (Def: distribuzione theta).

$$\vartheta(f) = \int_0^{\infty} f(x) dx.$$

(DIS11) (Prop). Sia $h \in C_1(\mathbb{R})$ non negativa, tale che $\int_{\mathbb{R}} h = 1$. Poniamo

$$g_n(x) := n h(nx) \quad x \in \mathbb{R}$$

Allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{g_n}(f) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x)f(x) dx = \delta_0(f) \quad \forall f \in \mathcal{K}.$$

(DIS12) (Esempio: delta di Dirac ottenuta come limite di gaussiane). Scegliendo al punto precedente $h(x) = e^{-x^2}/\sqrt{\pi}$ otteniamo:

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{g_n} & g_n(x) &:= \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2} \\ \delta_0(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2} & & \text{(notazione “impropria”)} \end{aligned}$$

(DIS13) Definizione di $P(1/x)$ (parte principale di $1/x$) ed espressione equivalente.

(DIS14) Definizione di $P(1/x^n)$ (parte principale di $1/x^n$)

$$P(1/x^n)(f) := \lim_{K \rightarrow +\infty} \int_{-K}^{+K} \frac{1}{x^n} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right] dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(DIS15) (Def). \mathcal{K}^* è l’insieme delle distribuzioni su \mathcal{K} .

(DIS16) (Def). Operazioni sulle distribuzioni: somma, prodotto per uno scalare.

(DIS17) (Def). Se $F \in \mathcal{K}^*$ e $h \in C^\infty(\mathbb{R})$, si definisce $(hF)(f) := F(hf)$ per ogni $f \in \mathcal{K}$.

(DIS18) (Prop). Siano n, m due interi positivi. Allora

$$x^n P\left(\frac{1}{x^m}\right) = \begin{cases} x^{n-m} & \text{se } n \geq m \\ P\left(\frac{1}{x^{m-n}}\right) & \text{se } n < m \end{cases}$$

(DIS19) (Esempio). $x^5 P(1/x^3) = x^2$, mentre $x^3 P(1/x^7) = P(1/x^4)$.

(DIS20) (Def: derivata di una distribuzione). $(DF)(f) = F'(f) := -F(f')$ per ogni $f \in \mathcal{K}$.

(DIS21) (Def). Convergenza nello spazio \mathcal{K}^* .

(DIS22) (Prop). Ogni distribuzione ha derivate di tutti gli ordini.

(DIS23) (Regola della derivata di un prodotto). Se $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $F \in \mathcal{K}^*$ allora $(hF)' = h'F + hF'$.

(DIS24) (Prop: il limite della derivata è uguale alla derivata del limite). Siano $(F_n)_{n=1}^\infty$ e F distribuzioni. Se $F_n \xrightarrow{\mathcal{K}^*} F$, allora $F_n' \xrightarrow{\mathcal{K}^*} F'$.

(DIS25) (Prop). Derivata (nel senso delle distribuzioni) di una funzione differenziabile a tratti.

(DIS26) (Esempi di applicazione della proposizione precedente).

$$\begin{aligned}
 D\vartheta &= \delta_0 & \vartheta \text{ è la distribuzione di Heaviside} \\
 D \operatorname{sgn}(x) &= 2\delta_0 \\
 D \operatorname{sgn}(-x) &= -2\delta_0 \\
 D \operatorname{sgn}(\sin x) &= 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\delta_{2k\pi} - \delta_{(2k+1)\pi}) \\
 D[x] &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k & [x] \text{ denota la parte intera di } x \\
 D[x^2] &= \sum_{k=1}^{\infty} (\delta_{\sqrt{k}} - \delta_{-\sqrt{k}})
 \end{aligned}$$

(DIS27) (Formula per la derivata ennesima della delta di Dirac). Se $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ si ha

$$h(x) \delta_a^{(n)} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} h^{(k)}(a) \delta_a^{(n-k)}$$

(DIS28) (Prop). $D|x - a| = \operatorname{sgn}(x - a)$.

(DIS29) (Prop). Se $g \in C^1(\mathbb{R})$, $D[g(|x|)] = g'(|x|) \operatorname{sgn}(x)$.

(DIS30) (Esempio). $De^{-|x|} = -e^{-|x|} \operatorname{sgn}(x)$.

(DIS31) (Prop). $D \operatorname{sgn}(x - a) = 2\delta_a = 2\delta(x - a)$.

(DIS32) Siano g e h due funzioni differenziabili a tratti, tali che nessun punto di discontinuità di g coincide con un punto di discontinuità di h . Allora si ha

$$D(gh) = (Dg)h + g(Dh).$$

(DIS33) (Prop). $D(\log|x|) = P(1/x)$.

(DIS34) (Prop). $DP(1/x^n) = -nP(1/x^{n+1})$.

(DIS35) (Sviluppo della “funzione composta della delta di Dirac”). Sia $b \in C^1$ e supponiamo che b abbia zeri semplici e isolati nei punti x_1, x_2, x_3, \dots , allora si ha

$$\delta[b(x)] = \sum_k \frac{1}{|b'(x_k)|} \delta_{x_k}.$$

Di conseguenza

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(b(x)) dx = \sum_k \frac{f(x_k)}{|b'(x_k)|}.$$

Esempio

$$\delta(\cos x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta\left(x - \frac{\pi}{2} - k\pi\right)$$

(DIS36) (QUESTO NO)(Un modo alternativo per associare una distribuzione alla funzione $1/x$ e relazione con la parte principale). Sia $\frac{1}{x - (x_0 \pm i0)}$ la distribuzione definita come

$$\frac{1}{x - (x_0 \pm i0)}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x - (x_0 \pm i\varepsilon)} dx$$

Allora vale

$$\frac{1}{x - (x_0 \pm i0)} = P\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \pm i\pi\delta_{x_0}$$

(DIS37) (Def). Trasformata di Fourier di una distribuzione: $(\mathcal{F}[\varphi])(f) := \varphi[\mathcal{F}f]$.

(DIS38) La definizione di trasformata di Fourier di una distribuzione obbedisce al “principio guida”, vale a dire, se φ è una distribuzione associata ad una funzione ordinaria g , si ha

$$\mathcal{F}(\varphi_g) = \varphi_{\mathcal{F}(g)}$$

(DIS39) Calcolo della trasformata di Fourier di $\delta_a, e^{iax}, x^n, P(1/x), \operatorname{sgn}(x), H(x)$.