Modelli e Metodi Matematici della Fisica. E1

Filippo Cesi – 2016–17

Nome	
Cognome	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
test	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (1 pt[1]). Scrivere sul frontespizio nome e cognome in stampatello, nelle apposite caselle. Ripeto, in STAMPATELLO.

(2) (8 pt). Calcolare il raggio di convergenza

$$(a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!\, e^{4n}}\, z^n \qquad\qquad (b)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3+i)^n}{n^2+1}\, z^n\,.$$

Risp: (a) e^3. (b) $1/\sqrt{10}$.

(3) (6 pt). Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $i^z = 1 - i\sqrt{3}$ (usare il ramo principale per definire la potenza). Disegnare accuratamente sul piano complesso le soluzioni che si trovano all'interno del quadrato di lato 10 centrato nell'origine. Quante sono queste ultime?

Soluzione. Per definizione di potenza con esponente complesso, si ha

$$i^z = \exp(z\log(i)) = \exp\big[z(\log|i| + i\,\mathrm{Arg}\, i)\big] = e^{iz\pi/2}\,.$$

L'equazione $i^z = 1 - i\sqrt{3}$ diventa dunque

$$e^{iz\pi/2} = 1 - i\sqrt{3}\,.$$

Le soluzioni di questa equazione sono

$$iz\frac{\pi}{2} = \log|1 - i\sqrt{3}| + i(\arg(1 - i\sqrt{3}) + 2k\pi) = \log 2 + i(-\pi/3 + 2k\pi) \qquad k \in \mathbb{Z}\,,$$

vale a dire

$$z_k = 4k - \frac{2}{3} - i\,\frac{2\log 2}{\pi} \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Il quadrato di lato 10 centrato nell'origine è determinato dalle condizioni

$$|\,\mathrm{Re}\, z| \le 5 \qquad |\,\mathrm{Im}\, z| \le 5\,.$$

Si verifica facilmente che le soluzioni per le quali queste condizioni sono soddisfatte, sono 3:

$$z_{-1},\;\; z_0\;\; z_1\,.$$

(4) (6 pt). Trovare la parte singolare dello sviluppo in serie di Laurent in $z = 0$ di

$$f(z) = \frac{\cos z + 1}{(e^{2z} - 1)^2}\,.$$

Risp: $\frac{1}{2z^2} - \frac{1}{z} + \mathcal{O}(1)$.

(5) (7 pt). Determinare le singolarità isolate, la loro natura, e, per i poli, trovare l'ordine.

$$f(z) = \frac{e^{1/z}(16z^2 - 1)}{\sin(2\pi z) - 1}\,.$$

Risp: $z = 0$ essenziale. $z = k + 1/4$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, polo ord 2. $z = 1/4$, polo ord 1.

[1] 1 pt = 0.5 trentesimi

(6) (7 pt). Calcolare

$$\int_{|z|=4} \frac{z\left(3z^4-3z+1\right)}{(z-1)^2\,(z^4-2)}\,dz\,.$$

Soluzione. Sia

$$f(z) := \frac{z\left(3z^4-3z+1\right)}{(z-1)^2\,(z^4-2)}\,.$$

Poiché non ci sono singolarità all'esterno del cammino di integrazione posso usare il metodo del residuo all'infinito, quindi

$$\int_{|z|=4} f(z)\,dz = -2\pi i\,\mathrm{Res}(f,\infty) = 2\pi i\,\mathrm{Res}\Big[\frac{1}{z^2}f\Big(\frac{1}{z}\Big),0\Big]\,.$$

Si ha

$$g(z) := \frac{1}{z^2}f\Big(\frac{1}{z}\Big) = -\frac{z^4-3z^3+3}{(z-1)^2 z\,(2z^4-1)}\,.$$

Ottengo dunque

$$\int_{|z|=4} f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(g,0) = 6\pi i\,.$$

(7) (7 pt). Calcolare

$$\int_{|z-1|=2} \frac{z^2-5z+6}{\sin\left(\pi z/2\right)^2}\,dz\,.$$

Soluzione. Sia

$$f(z) := \frac{z^2-5z+6}{\sin\left(\pi z/2\right)^2}\,.$$

Le singolarità di f che si trovano all'interno del cammino di integrazione sono

$$\begin{aligned} z&=0 &\qquad& \text{polo di ordine } 2\\ z&=2 && \text{polo di ordine } 1\,. \end{aligned}$$

La parte singolare dello sviluppo di f nell'intorno delle singolarità è data da

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{24}{\pi^2 z^2} - \frac{20}{\pi^2 z} + \underline{\mathcal{O}}(1) &\qquad& z_0 = 0\\ f(z) &= -\frac{4}{\pi^2(z-2)} + \underline{\mathcal{O}}(1) && z_0 = 2\,. \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_{|z-1|=2} f(z)\,dz = 2\pi i\,\big[\mathrm{Res}(f,0)+\mathrm{Res}(f,2)\big] = 2\pi i\,\left(-\frac{20}{\pi^2}-\frac{4}{\pi^2}\right) = -\frac{48i}{\pi}\,.$$

(8) (5 pt). Vero o falso: (attenzione: risposta giusta = +1, senza risposta = 0, risposta sbagliata = −1).

(a) Una funzione intera si annulla necessariamente almeno in un punto.

(b) Se f è intera e $f(z) = 0$ quando $z = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ allora f è identicamente nulla.
(c) Se f è intera e $f(z) = 0$ quando $z = i, 2i, 3i, 4i, \ldots$ allora f è identicamente nulla.
(d) Se f è analitica in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ allora esiste F analitica in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ tale che $F' = f$ (vale a dire f ha una primitiva).
(e) Se f ha una primitiva in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ allora l'integrale di f lungo un qualsiasi cammino chiuso (regolare a tratti) che non passa per 0 è nullo.

Soluzione.

(a) Falso: e^z.
(b) Vero, per il teorema sul punto di accumulazione degli zeri.
(c) Falso: $\sinh(\pi z)$.
(d) Falso: $1/z$ non ha una primitiva su $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.
(e) Vero per il teorema findamentale del calcolo integrale applicato ad un cammino chiuso.

(9) (7 pt). Enunciare e dimostrare il teorema di Morera.