Numeri Complessi

(1) Calcolare:

(a) $\operatorname{Re}\dfrac{1+2i}{2-i}$ (b) $\operatorname{Im}\dfrac{3-2i}{4+i}$ (c) $\left|\dfrac{3-2i}{4+i}\right|$ (d) $\left|\dfrac{(3-2i)^5\,(2+i)^3}{(5-i)^8}\right|$

(e) $\operatorname{Re}(i^{9876})$ (f) $\operatorname{Re}\Big[\Big(\dfrac{23-15i}{14+4i}\Big)^{\operatorname{Im}(z+\bar z)}\Big]$ (g) $|2e^{3i}|$ (h) $|2e^3|$

(i) $\operatorname{Re}(e^{2i})$ (j) $\operatorname{Re}(e^{-i\pi/4})$ (k) $\operatorname{Re}(e^{-\pi/4})$ (l) $|1-i\sqrt{3}|$

(m) $|1-\sqrt{3}|$

Risp: (a) 0. (b) $-11/17$. (c) $\sqrt{13/17}$. (d) $\frac{5\sqrt{5}}{208\sqrt{13}}$. (f) 1. (g) 2. (h) $2e^3$. (j) $1/\sqrt{2}$. (k) $e^{-\pi/4}$. (l) 2. (m) $\sqrt{3}-1$.

[OP] (2) Calcolare Arg e $\arg_+$

(a) 3	(b) -5	(c) $2i$	(d) $-4i$
(e) $1+i$	(f) $3-3i$	(g) $-1-i\sqrt{3}$	(h) $2\sqrt{3}-2i$
(i) $-3+i\sqrt{3}$	(j) $-3-i\sqrt{3}$	(k) $\sqrt{3}-i$	(l) $\sqrt{3}-3i$
(m) $2-3i$	(n) $-2-4i$	(o) $(-1+i\sqrt{3})^5$	(p) $(2\sqrt{3}-2i)^5$
(q) $e^{i3\pi/2}$	(r) $e^{3\pi/2}$	(s) e^{6i}	(t) $i-2$

Risp: (a) $0,\ 0$. (b) $\pi,\ \pi$. (d) $-\pi/2,\ 3\pi/2$. (g) $-2\pi/3,\ 4\pi/3$. (i) $5\pi/6,\ 5\pi/6$. (j) $-5\pi/6,\ 7\pi/6$. (m) $-\arctan(3/2),\ 2\pi-\arctan(3/2)$. (n) $\arctan 2-\pi,\ \arctan 2+\pi$. (o) $-2\pi/3,\ 4\pi/3$. (q) $-\pi/2,\ 3\pi/$. (r) $0,\ 0$. (s) $6-2\pi,\ 6$. (t) $\pi-\arctan(1/2),\ \pi-\arctan(1/2)$.

(3) Calcolare (trovare il valore numerico!) parte reale e parte immaginaria di

(a) $5e^{i\pi/3}$ (b) $2ie^{i13\pi/4}$ (c) $5e^{-2i\pi/3}$ (d) $(1+i)^{20}$

(e) $(1+i)^5(\sqrt{3}+i)^3$ (f) $(1-\sqrt{3}i)^{100}$ (g) $(1+2i)^5$

Risp: (b) $\sqrt{2}-i\sqrt{2}$. (d) -2^{10}. (e) $32-32i$. (f) $2^{99}(-1+i\sqrt{3})$. (g) $41-38i$.

(4) Sia $x\in\mathbb{R}\backslash\{\pi+2k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$. Verificare che

$$(a)\quad \operatorname{Re}\left(\frac{1}{e^{ix}+1}\right)=\frac{1}{2} \qquad\qquad (b)\quad \operatorname{Im}\left(\frac{1}{e^{ix}+1}\right)=-\frac{1}{2}\tan(x/2)\,.$$

(5) Dimostrare per induzione che, per ogni intero $n\geq 2$, vale $|z_1+\cdots+z_n|\leq|z_1|+\cdots+|z_n|$.

(6) Descrivere a parole e graficamente le regioni seguenti

(a) $|z-i+5|=3$ (b) $|3z+i|\geq 1$ (c) $\operatorname{Re}(\bar z+2i)\leq 5$

(d) $\operatorname{Re}(\bar z)\leq\operatorname{Im}(z)$ (e) $|z-a|-|z+a|=2c$ con a,c reali positivi, $c<a$

(f) $|z-1|-|z+i|=0$ (g) $|z-1|+|z+i|=0$ (h) $\left|\dfrac{z}{z+1}\right|\leq 1$

(7) Dimostrare che, se $|z|=10$, allora

$$(a)\quad 98\leq|z^2+2i|\leq 102 \qquad\qquad (b)\quad \left|\frac{z^2+20i}{z^3-5iz^2+20}\right|\leq\frac{1}{4}$$

☆ (8) Siano $a,b,c\in\mathbb{C}$. Sotto quale condizione l'equazione

$$az+b\bar z+c=0$$

ha una e una sola soluzione? Scrivere la soluzione. (Sugg: prendere il complesso coniugato dell'equazione ed eliminare $\bar z$).

Volta la pagina ☞

(9) Esprimere le seguenti quantità in funzione di $\sin\vartheta$, $\cos\vartheta$

$$(a)\quad \cos(3\vartheta) \qquad (b)\quad \sin(4\vartheta) \qquad (c)\quad \cos(5\vartheta)$$

Risp: (c) $\cos^5\vartheta - 10\cos^3\vartheta\sin^2\vartheta + 5\cos\vartheta\sin^4\vartheta$.

(10) Trovare $w, z \in \mathbb{C}$ tali che

$$(a)\quad \operatorname{Arg}(w\,z) \neq \operatorname{Arg} w + \operatorname{Arg} z \qquad (b)\quad \arg_+(w\,z) \neq \arg_+ w + \arg_+ z$$

☆ (11) Dimostrare che (se non erro), per $\vartheta \neq 0$, vale la seguente identità [Sugg: il membro a sinistra si può scrivere come $\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{n}(e^{i\vartheta})^k$ ed è dunque una somma geometrica finita per la quale esiste una formula esplicita. A questo punto servono un po' di formule trigonometriche ed una certa dose di pazienza]

$$1 + \cos\vartheta + \cos 2\vartheta + \cdots + \cos n\vartheta = \frac{\sin((n+1)\vartheta/2)}{\sin(\vartheta/2)}\cos(n\vartheta/2)\,.$$

(12) Trovare e disegnare nel piano complesso (tutte) le soluzioni delle equazioni:

$$(a)\quad z^2 = 1 \qquad (b)\quad z^3 = i \qquad (c)\quad z^5 = 1 + i \qquad (d)\quad z^4 = 1 - i\sqrt{3}$$
$$(e)\quad 2z^7 + 3iz = 0 \qquad (f)\quad z^6 + 2z^3 + 1 = 0 \qquad (g)\quad z^2 - 2i = 4$$

Risp: (d) $z = \sqrt[4]{2}\exp[-i(\pi/12 + k\pi/2)]$, $k = 0, 1, 2, 3$.
(e) $z = 0$, $z = \sqrt[6]{3/2}\exp[-i(\pi/12 + k\pi/3)]$, $k = 0, 1, \ldots, 5$. (g) $z_1 = \sqrt{2+\sqrt{5}} + i\big(\sqrt{2+\sqrt{5}}\,\big)^{-1}$, $z_2 = -z_1$. Per ottenere questi valori numerici di z_1 e z_1 si può considerare la (g) come un sistema di 2 equazioni in 2 incognite, prendendo la parte reale e la parte immaginaria. Alternativamente, con un po' di trigonometria, si può ottenere il valore di $\cos(\vartheta/2)$ in cui $\vartheta = \arctan(1/2)$.

(13) Calcolare il valore numerico di $\cos(3\arctan 2)$. [Sugg: si esprima $\cos(3\vartheta)$ in funzione di ...].

(14) Supponendo che $z^n = 1$ calcolare il valore della seguente somma (considerare separatamente il caso $k = 0$).

$$1 + z^k + z^{2k} + \ldots + z^{(n-1)k} \qquad k \text{ intero positivo}$$

(15) Descrivere a parole e graficamente le regioni seguenti

$$(a)\quad |\pi/2 - \arg z| \leq \pi/4 \qquad (b)\quad 1 \leq |z + i| \leq 2 \qquad (c)\quad 0 \leq \arg z \leq \pi/2$$
$$(d)\quad \pi/4 \leq \arg(z + i) \leq \pi/2 \qquad (e)\quad \operatorname{Re} z^2 \geq \operatorname{Im} z^2$$

Risp: (e) Risolvere l'uguaglianza $\operatorname{Re} z^2 = \operatorname{Im} z^2$ in coordinate cartesiane e usare $\tan(\pi/8) = \sqrt{2} - 1$. Si trova $\{\arg z \in [-3\pi/8, \pi/8] \cup [5\pi/8, 9\pi/8]\}$.

(16) Scomporre $z^4 + 4$ come prodotto di due polinomi quadratici a coefficienti reali. [Sugg: trovare le soluzioni (complesse) dell'equazione $z^4 + 4 = 0$].

Cammini

(17) Descrivere a parole i seguenti cammini e disegnarne la traccia sul piano complesso.

$(a)\quad \gamma(t) = t, \quad t \in [0,1]$ $\qquad$ $(b)\quad \gamma(t) = it, \quad t \in [0,1]$

$(c)\quad \gamma(t) = 1 - it, \quad t \in [0,1]$ $\qquad$ $(d)\quad \gamma(t) = t + it, \quad t \in [0,1]$

$(e)\quad \gamma(t) = t^2 - it^2, \quad t \in [0,2]$ $\qquad$ $(f)\quad \gamma(t) = t + it^2, \quad t \in [0,1]$

$(g)\quad \gamma(t) = -t^2 - it, \quad t \in [0,1]$ $\qquad$ $(h)\quad \gamma(t) = t + i\sin t, \quad t \in [0,\pi/2]$

$(i)\quad \gamma(t) = e^t + 2ie^t, \quad t \in [0,\infty)$ $\qquad$ $(j)\quad \gamma(t) = e^t + 2ie^t, \quad t \in (-\infty, 0]$

$(k)\quad \gamma(t) = \log t + 2i\log t, \quad t \in (0,\infty)$ $\qquad$ $(l)\quad \gamma(t) = \log t + 2i\log t, \quad t \in (0,1]$

$(m)\quad \gamma(t) = e^{it}, \quad t \in [0,2\pi]$ $\qquad$ $(n)\quad \gamma(t) = te^{i}, \quad t \in [0,2\pi]$

$(o)\quad \gamma(t) = e^{i\sin t}, \quad t \in [0,\pi/2]$ $\qquad$ $(p)\quad \gamma(t) = te^{it}, \quad t \in [0,\infty)$

Risp: (a) segmento $[0,1]$. (b) segmento $[0,i]$. (c) segmento $[1, 1-i]$. (e) segmento $[0, 4-4i]$. (f) arco di parabola $y = x^2$ con $x \in [0,1]$. (i) semiretta uscente dal punto $(1,2)$ e angolo $\arctan 2$. (k) retta passante per l'origine e angolo $\arctan 2$. (n) segmento di lunghezza 2π con un estremo in 0 che forma un angolo 1 con l'asse x.