

## Funzioni analitiche, funzioni elementari

(1) Dimostrare che

$$(a) D(\sin) = \cos \quad (b) D(\cos) = -\sin \quad (c) \sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

(2) Dimostrare che, se  $z = x + iy$ , si ha

$$(a) \sinh z = -i \sin(iz) \quad (b) \cosh z = \cos(iz)$$

$$(c) |\sin z|^2 = \frac{1}{2} [\cosh(2y) - \cos(2x)] \quad (d) |\cos z|^2 = \frac{1}{2} [\cosh(2y) + \cos(2x)]$$

[FE] (3) Se  $z = x + iy$ , esprimere la parte reale e la parte immaginaria delle seguenti funzioni in termini di funzioni reali di  $x$  e  $y$

$$(a) \sin z \quad (b) \cos z \quad (c) e^{\cos z} \quad (d) \tan z \quad (e) e^{e^z}$$

*Risp:* (b)  $\operatorname{Re}(\cos z) = \cos x \cosh y$ .  $\operatorname{Im}(\cos z) = -\sin x \sinh y$ .

(e)  $\operatorname{Re}(e^{e^z}) = \exp(e^x \cos y) \cos(e^x \sin y)$ .  $\operatorname{Im}(e^{e^z}) = \exp(e^x \cos y) \sin(e^x \sin y)$ .

(4) Trovare tutte le soluzioni

$$(a) \sin z = 0 \quad (b) \cos z = 0 \quad (c) \cosh z = 0 \quad (d) \sin z = \frac{4i}{3} \quad (e) \tan z = \frac{5i}{3}$$

*Risp:* (a)  $z = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . (c)  $z = i(\pi/2 + k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . (d)  $z = k\pi + i(-1)^k \log 3$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . (e)  $z = (k + 1/2)\pi + i \log 2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

(5) Dimostrare che

$$(a) |\cosh z| \leq \cosh |z| \quad (b) |\sinh z| \leq \sinh |z|$$

(6) Dimostrare che

$$(a) \sin(u + v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v \quad (b) \sinh(u + v) = \sinh u \cosh v + \cosh u \sinh v$$

$$(c) \cosh(2z) - 1 = 2 \sinh^2 z \quad (d) \cosh(2z) + 1 = 2 \cosh^2 z$$

$$(e) D(\sinh) = \cosh \quad (f) D(\cosh) = \sinh$$

(7) Dimostrare che

$$(a) |\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y \quad (b) |\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$$

$$(c) |\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y = -\sin^2 x + \cosh^2 y$$

$$(d) |\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y = \cosh^2 x - \sin^2 y$$

(Sugg:  $\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) = \dots$ )

(8) Dimostrare che

$$(a) \sinh(z + i\pi) = -\sinh z \quad (b) \cosh(z + i\pi) = -\cosh z$$

(9) Trovare tutte le soluzioni

$$(a) e^z = -1 \quad (b) e^z = 2 + 2i$$

$$(c) \cosh z = \frac{1}{2} \quad (d) \sinh z = i \quad (e) \cosh z = -2$$

*Risp:* (a)  $i(2k + 1)\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . (c)  $\pm i(\pi/3 + 2k\pi)$ . (d)  $i(\pi/2 + 2k\pi)$ . (e)  $\pm \log(2 + \sqrt{3}) + i(2k + 1)\pi$ .

(10) Calcolare (usare il ramo principale di  $\sqrt{z}$  e delle potenze con esponente non intero)

$$(a) \log(1+i) \quad (b) \log(1-i) \quad (c) \log_+(1-i) \quad (d) \log(-1+i0)$$

$$(e) \log(-1-i0) \quad (f) \sqrt{i} \quad (g) \sqrt{-4+i0} \quad (h) \sqrt{-4-i0} \quad (i) i^i$$

$$(j) (-i)^{1/\pi} \quad (k) (1-i)^{4i}$$

*Risp:* (a)  $\log 2/2 + i\pi/4$ . (b)  $\log 2/2 - i\pi/4$ . (c)  $\log 2/2 + i7\pi/4$ . (d)  $i\pi$ . (e)  $-i\pi$ . (i)  $e^{-\pi/2}$ . (j)  $e^{-i/2}$ . (k)  $\exp[\pi + i2 \log 2]$ .

(11) Far vedere che, se  $z = (-1 + i)$ ,  $\log(z^2) \neq 2 \log z$

(12) Determinare il dominio di analiticità delle seguenti funzioni

$$(a) \frac{z^4 + z^3 + i}{z^2 + i} \quad (b) e^{z^2+3} \quad (c) \sinh(e^{\cosh z}) \quad (d) \log(1-iz) \quad (e) \sqrt{z^3-1}$$

$$(f) \log(1+z^2) \quad (g) \log[(1+z)^2] \quad (h) \sqrt{1-z^2} \quad (i) z^z \quad (j) \log[(\log z)^2]$$

*Risp:* (d)  $\mathbb{C} \setminus \{-is : s \geq 1\}$ . (f)  $\mathbb{C} \setminus \{\pm is : s \geq 1\}$ . (j)  $\mathbb{C} \setminus (\{z \leq 0\} \cup \{|z| = 1\})$ .

(13) Data la funzione  $f$  e l'insieme  $A \subset \mathbb{C}$ , determinare e disegnare su 2 grafici separati, gli insiemi  $A$  e  $f(A)$

$$(a) f(z) = e^z \quad A = \text{asse } x \quad (b) f(z) = e^z \quad A = \text{asse } y$$

$$(c) f(z) = e^z \quad A = \{\text{Im } z = \pi\} \quad (d) f(z) = e^z \quad A = \{\text{Re } z = -1\}$$

$$(e) f(z) = \log z \quad A = \mathbb{C} \setminus \{z \leq 0\} \quad (f) f(z) = \log z \quad A = \{|z| = 1, z \neq -1\}$$

$$(g) f(z) = \sqrt{z} \quad A = \mathbb{C} \setminus \{z \leq 0\} \quad (h) f(z) = \sqrt{z} \quad A = \{-\pi/3 \leq \text{Arg } z \leq \pi/2\}$$

*Risp:* (a)  $f(A) = (0, \infty)$ . (c)  $f(A) = \{z = x : x < 0\}$ . (d)  $f(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1/e\}$ . (f)  $f(A) = \{z = iy : |y| < \pi\}$ .

(14) Per quali valori di  $z$  la seguente serie è convergente?

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nz}$$

## Varie

[FE] (15) Sia  $z = i\sqrt{3} - 1$ . Usando il ramo principale, calcolare le seguenti espressioni (il risultato deve essere un numero palesemente reale!)

$$(a) \text{Re}(z^{10}) \quad (b) |(-i)^z| \quad (c) \text{Arg}(z^i)$$

*Risp:* (a)  $-2^9 = -512$ . (b)  $e^{\pi\sqrt{3}/2}$ . (c)  $\log 2$ .

(16) Sia  $z = \sqrt{3} - i$ . Usando il ramo principale, calcolare le seguenti espressioni (il risultato deve essere un numero palesemente reale!)

$$(a) \text{Im}(z^{10}) \quad (b) |(1-i)^z| \quad (c) \text{Re}(z^{-i})$$

*Risp:* (a)  $2^9\sqrt{3}$ . (b)  $\exp[\frac{1}{2}\sqrt{3} \log 2 - \pi/4]$ . (c)  $e^{-\pi/6} \cos \log 2$ .

11-12/S2 (17) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione  $z^i = 1 + i$  (usare il ramo principale per definire la potenza). Quante di queste soluzioni appartengono all'insieme  $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq e^{10\pi}\}$ ?

11-12/S3 (18) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione (usare il ramo principale per definire la potenza)

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^z = -2.$$

Disegnare sul piano complesso le soluzioni che si trovano all'interno del quadrato di lato 50 centrato nell'origine. Quante sono queste ultime?