Argomenti

(1) ε è una quantità *positiva* che tende a zero. Per ciascuna dei seguenti numeri complessi z determinare le quantità indicate. Arg è l'argomento principale, arg l'argomento generico (a molti valori) e $\arg_+ := \arg_{(0,2\pi)}$. La risposta può essere fornita in termini di altre quantità positive che tendono a zero con ε che si possono (ad esempio) denotare con ε', $\bar\varepsilon$, ecc. (Spesso conviene trovare la soluzione per via grafica)

$$\begin{array}{lllll}
z=\varepsilon+i & (a)\ \ \arg z & (b)\ \ \arg_+(1-z) & (c)\ \ \mathrm{Arg}(1+2z^2) & (d)\ \ \mathrm{Arg}(2+z^2)\\
z=\varepsilon+i & (e)\ \ \mathrm{Arg}(z^4) & (f)\ \ \arg_+(z^4) & (g)\ \ \mathrm{Arg}(\bar z) & (h)\ \ \mathrm{Arg}(1/z)\\
z=2e^{i(3\pi/5-\varepsilon)} & (i)\ \ \mathrm{Arg}(1+z^5) & (j)\ \ \mathrm{Arg}(1-z^5) & (k)\ \ \mathrm{Arg}(50+z^5) & (l)\ \ \arg_+(1-z^5)\\
z=2e^{i(3\pi/5+\varepsilon)} & (m)\ \ \mathrm{Arg}(1+z^5) & (n)\ \ \mathrm{Arg}(1-z^5) & (o)\ \ \mathrm{Arg}(50+z^5) & (p)\ \ \arg_+(1-z^5)\\
z=2e^{i(2\pi/3+\varepsilon)} & (q)\ \ \mathrm{Arg}(1+z^3) & (r)\ \ \mathrm{Arg}(1-z^3) & (s)\ \ \arg_+(1+z^3) & (t)\ \ \arg_+(1-z^3)
\end{array}$$

Risp: (a) $\pi/2-\varepsilon'+2k\pi$. (b) $7\pi/4-\varepsilon'$. (c) $\pi-\varepsilon'$. (d) ε'. (e) $-\varepsilon'$. (f) $2\pi-\varepsilon'$. (g) $-(\pi/2-\varepsilon')$. (h) $-(\pi/2-\varepsilon')$. (i) $\pi-\varepsilon'$. (j) $-\varepsilon'$. (k) ε'. (l) $2\pi-\varepsilon'$. (m) $-(\pi-\varepsilon')$. (n) ε'.

(2) Sia $\sqrt[n]{w}$ la radice n-sima di w definita tramite il ramo principale ($\sqrt[n]{w} := |w|^{1/n}\, e^{i/n\,\mathrm{Arg}\,w}$) e e sia $\sqrt[n]{w}^{(+)}$ la radice n-sima di w definita come $\sqrt[n]{w}^{(+)} := |w|^{1/n}\, e^{i/n\arg_+ w}$. Calcolare il limite per $\varepsilon\to 0^+$ delle seguenti espressioni

$$\begin{array}{lllll}
f(z)=\sqrt{1+z^2} & (a)\ \ f(2i+\varepsilon) & (b)\ \ f(2i-\varepsilon) & (c)\ \ f(1+i\varepsilon) & (d)\ \ f(-2i+\varepsilon)\\
f(z)=\sqrt{1+z^2}^{(+)} & (e)\ \ f(2i+\varepsilon) & (f)\ \ f(2i-\varepsilon) & (g)\ \ f(2+i\varepsilon) & (h)\ \ f(-2i-\varepsilon)\\
f(z)=\sqrt[5]{1+z^3}^{(+)} & (i)\ \ f(2e^{i(\pi/3-\varepsilon)}) & (j)\ \ f(2e^{i(\pi/3+\varepsilon)}) & (k)\ \ f(2e^{i(2\pi/3-\varepsilon)}) & (l)\ \ f(2e^{i(2\pi/3+\varepsilon)})\\
f(z)=\sqrt[5]{1+z^3} & (m)\ \ f(2e^{i(\pi/3-\varepsilon)}) & (n)\ \ f(2e^{i(\pi/3+\varepsilon)}) & (o)\ \ f(2e^{i(2\pi/3-\varepsilon)}) & (p)\ \ f(2e^{i(2\pi/3+\varepsilon)})
\end{array}$$

Risp: (a) $i\sqrt{3}$. (b) $-i\sqrt{3}$. (c) $\sqrt{2}$. (d) $-i\sqrt{3}$. (e) $i\sqrt{3}$. (f) $i\sqrt{3}$. (g) $\sqrt{5}$. (h) $i\sqrt{3}$. (i) $\sqrt[5]{7}e^{i\pi/5}$. (j) $\sqrt[5]{7}e^{i\pi/5}$. (k) $\sqrt[5]{9}e^{i2\pi/5}$. (k) $\sqrt[5]{9}$.

Condizioni di Cauchy–Riemann, funzioni armoniche

(3) Determinare i valori di $z=x+iy\in\mathbb{C}$ in cui esiste $f'(z)$

$$(a)\ \ f(z)=z^2\,\mathrm{Re}\,z \qquad (b)\ \ f(z)=x^2+iy^2 \qquad (c)\ \ f(z)=z-\bar z$$

Risp: (a) $z=0$. (b) $\{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}\,z=\mathrm{Im}\,z\}$. (c) Mai.

(4) Dimostrare che $f(z)=\bar z\exp[\cosh(z^2)]$ non è analitica.

(5) Trovare l'armonica coniugata di

$$(a)\ \ u(x,y)=x^3-3x\,y^2 \qquad (b)\ \ u(x,y)=e^{-x}\left[(1+x)\cos y+y\sin y\right]\ .$$

(6) Trovare l'armonica coniugata di u

$$\begin{array}{ll}
(a)\ \ u(x,y):=\dfrac{1+x}{(1+x)^2+y^2} & x\in\mathbb{R},\ y>0\\
(b)\ \ u(x,y):=e^{-x}\,(x\,\sin y-y\cos y) & (x,y)\in\mathbb{R}^2\,.
\end{array}$$

(7) Trovare un polinomio $P(x,y)$ armonico tale che vale $P(x,y)=2x^2-1$ sulla circonferenza unitaria.

(8) Trovare un polinomio armonico $P(x,y)$ che contenga il termine x^4.

Risp: $x^4-6x^2y^2+y^4$.

(9) Trovare tutti i polinomi armonici $P(x,y)$ tali che $P(x,y)^2$ è ancora armonico (sono pochi).

Volta la pagina ☞

Sviluppi in serie

(10) Determinare l'ordine di grandezza $\mathcal{O}((z-z_0)^n)$ nel limite $z \to z_0$

$$
\begin{array}{ll}
(a)\;\; z_0 = 0,\; (\sin z)^3 & (b)\;\; z_0 = 0,\; (\cosh z^2 - 1)^2 \\
(c)\;\; z_0 = 0,\; \log(1+z^3) & (d)\;\; z_0 = \pi,\; \sin(z) \\
(e)\;\; z_0 = 0,\; \sin(\pi \exp(z^3)) & (f)\;\; z_0 = 1,\; (\log z)^2 \\
(g)\;\; z_0 = 0,\; \log(\cos z) & (h)\;\; z_0 = \pi,\; \log(1+\sin^2(z)) \\
(i)\;\; z_0 = 0,\; \sin(e^{z^2}) & (j)\;\; z_0 = 0,\; \sin(\pi e^{z^2})
\end{array}
$$

Risp: (a) $\mathcal{O}(z^3)$. (b) $\mathcal{O}(z^8)$. (c) $\mathcal{O}(z^3)$. (d) $\mathcal{O}(z-\pi)$. (e) $\mathcal{O}(z^3)$. (f) $\mathcal{O}(z-1)^2$. (g) $\mathcal{O}(z^2)$. (h) $\mathcal{O}((z-\pi)^2)$. (i) $\mathcal{O}(1)$. (j) $\mathcal{O}(z^2)$.

(11) Calcolare lo sviluppo di Taylor nell'origine fino all'ordine z^4

$$
\begin{array}{ll}
(a)\;\; \dfrac{z\cos z}{1+\log(1+z^2)} & (b)\;\; \dfrac{e^{z^2}-1}{3+\cosh z} \\
(c)\;\; \dfrac{\sin^3 z}{1-\cosh z} & (d)\;\; \tan z
\end{array}
$$

Risp: (a) $z - 3z^3/2 + \mathcal{O}(z^5)$. (b) $z^2/4 + 3z^4/32 + \mathcal{O}(z^6)$. (c) $-2z + 7z^3/6 + \mathcal{O}(z^5)$. (d) $z + z^3/3 + \mathcal{O}(z^5)$.