Varie

(1) Sia $f(z)$ una funzione intera che non si annulla mai, ad eccezione del punto $z = 1$ che rappresenta uno zero semplice di f e sia

$$g(z) = \frac{e^z}{f(z^3)}.$$

Supponendo di sviluppare g in serie di Taylor con centro nel punto -2

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (z+2)^n$$

determinare il raggio di convergenza R di questa serie di potenze.
Risp: $\sqrt{3}$.

[ST] (2) Calcolare lo sviluppo di Taylor nell'origine fino all'ordine z^3 della funzione

$$f(z) = \frac{\log(1+z)}{1+e^z}$$

Risp: $\frac{z}{2} - \frac{z^2}{2} + \frac{7z^3}{24} + \mathcal{O}(z^4)$.

(3) Calcolare lo sviluppo di Taylor nell'origine fino all'ordine z^2 della funzione

$$f(z) = \frac{\sin z}{e^z - 1}$$

Risp: $1 - \frac{z}{2} - \frac{z^2}{12} + \mathcal{O}\left(z^3\right)$.

(4) Sia f una funzione analitica sul piano complesso ad eccezione di un numero finito di singolarità isolate nei punti $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Supponiamo che nessuno dei punti z_k coincida con l'origine e sia

$$\alpha := \min_{k=1,\ldots,n} |z_k| > 0\,.$$

Sapendo che che $f^{(3)}(0) = 1 + i$ e che $|f(z)| \le 4|z|$ per ogni z tale che $|z - z_k| \ge \alpha/2$ per ogni $k = 1, \ldots, n$, cosa si può afferrmare su α?
Risp: $\alpha \le 4\sqrt[4]{2}\,\sqrt{3}$.

(5) Trovare gli zeri con relative molteplicità delle seguenti funzioni

(a)	$(z^2-2)^3(z^4-1)^2$	(b)	$z^2 \sinh z$
(c)	$\cos(\pi z) + 1$	(d)	$(2\sin(\pi z/6) - 1)\,(z^2 + 6z - 7)^2$
(e)	$(\sin(\pi z/6) - 1)\,(z^2 + 6z - 7)^2$	(f)	$e^{\pi z^4} + 1\,.$

Risp: (a) $z = \pm\sqrt{2}$, molt 3, $z \in \{\pm 1, \pm i\}$, molt 2. (b) $z = 0$, molt 3, $z = ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, molt 1. (c) $z = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$, molt 2. (d) $z = 1 + 12k$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, molt 1. $z = 5 + 12k$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$, molt 1. $z \in \{-7, 1\}$, molt 3. (e) $z = 3 + 12k$, $k \in \mathbb{Z}$, molt 2. $z \in \{-7, 1\}$, molt 2. (f) $z = \sqrt[4]{2n+1}\exp[i(\pm\pi/8 + k\pi/2)]$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0,1,2,3\}$, molt 1.

Le funzioni Zeta e Gamma

(6) Determinare l'insieme dei valori di z per i quali è possibile definire la funzione zeta di Riemann come serie assolutamente convergente

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

Volta la pagina ☞

(7) Dimostrare che l'insieme dei valori di z per i quali è possibile definire la "funzione Gamma" come integrale assolutamente convergente

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1}\, e^{-t}\, dt$$

è dato da $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$. [Ricorda che se $f(t)$ è una funzione reale, continua su $[0, A)$ tale che $f(t) \sim t^\alpha$ quando $t \to 0^+$, allora l'integrale $\int_0^A |f(t)|\, dt$ è convergente se e solo se $\alpha > -1$].

(8) (Una proprietà della funzione Gamma).

(a) Verificare che (considerando il ramo principale)

$$z^w\, z^u = z^{w+u} \qquad\qquad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{z \leq 0\} \quad \forall w, u \in \mathbb{C}\,.$$

(b) Verificare che se $f(z) := z^w$, allora $f'(z) = w\, z^{w-1}$. Da questo segue che, in particolare

$$\frac{d}{dt} t^z = z\, t^{z-1} \qquad\qquad t \in \mathbb{R}_+ \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

(c) Dimostrare che si ha: $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ (se $\operatorname{Re} z > 0$).

(d) Calcolare $\Gamma(n)$ in cui n è un intero positivo.

☆ (9) Sia S_n la sfera unitaria n-dimensionale (vale a dire il bordo di una palla $(n+1)$-dimensionale)

$$S_n := \{x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

e sia a_n il volume di S_n. Dimostrare che

$$a_{n-1} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\,.$$

Utilizzando la proprietà $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, valida per $\operatorname{Re} z > 0$ e sapendo che $\Gamma(1) = 1$ e $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, calcolare esplicitamente a_n per $n = 1, 2, \ldots, 5$.

Istruzioni: si calcoli l'integrale

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left[-(x_1^2 + \cdots + x_n^2)\right]\, d^n x$$

sia in coordinate cartesiane che in coordinate sferiche e si imponga che i due risultati siano uguali. Si osservi che l'elemento di volume $d^n x$, grazie alla simmetria dell'integrando, può essere scritto in coordinate sferiche come $d^n x = a_{n-1}\, r^{n-1} dr$.