Serie di Laurent

(1) Sviluppare in serie di Laurent negli insiemi indicati.

$$\frac{1}{a-z} \qquad (a)\ \ |z-z_0|<|a-z_0| \qquad (b)\ \ |z-z_0|>|a-z_0|$$

$$\frac{1}{a+z} \qquad (c)\ \ |z-z_0|<|a+z_0| \qquad (d)\ \ |z-z_0|>|a+z_0|$$

$$\frac{z}{(z^2+4)^2} \qquad (e)\ \ \dot{B}_4(2i) \qquad (f)\ \ \mathrm{An}_{2,\infty}(0)$$

Risp: (a) $\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n/(a-z_0)^{n+1}$ (b) $-\sum_{n=-1}^{-\infty}(z-z_0)^n/(a-z_0)^{n+1}$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-z_0)^n/(a+z_0)^{n+1}$ (d) $-\sum_{n=-1}^{-\infty}(-1)^n(z-z_0)^n/(a+z_0)^{n+1}$ (e) $-\frac{i}{8(z-2i)^2}-\sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{2(4i)^{n+3}}(z-2i)^n$. (f) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)4^n}{z^{2n+3}}$.

[SL] (2) Sviluppare in serie di Laurent negli insiemi indicati. Scrivere sia lo sviluppo completo che lo sviluppo esplicito di tutti i termini non nulli $c_n(z-z_0)^n$ con n compreso fra -2 e 1.

$$f(z)=\frac{z^2+5z-10}{(z-1)^2\,(z+3)} \qquad (a)\ \ \dot{B}_4(1), \quad (b)\ \ \dot{B}_4(-3)$$

Risp: (a) $-\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{2}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{4^{n+1}}=-\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{2}{z-1}-\frac{1}{4}+\frac{z-1}{16}-\frac{(z-1)^2}{64}+\cdots$ (b) $-\frac{1}{z+3}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+9}{4^{n+2}}(z+3)^n=-\frac{1}{z+3}-\frac{9}{16}-\frac{5}{32}(z+3)-\frac{11}{256}(z+3)^2+\cdots$

(3) Sviluppare in serie di Laurent negli insiemi indicati. Scrivere sia sviluppo completo che lo sviluppo esplicito di tutti i termini non nulli $c_n(z-z_0)^n$ con n compreso fra -2 e 2.

$$(a)\ \ (z+1)^2\,e^{1/z} \qquad \mathbb{C}\backslash\{0\}$$

$$(b)\ \ z^2\,\cos(2/z^2) \qquad \mathbb{C}\backslash\{0\}$$

Risp: (e) $z^2+3z+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+5n+7}{(n+2)!}\frac{1}{z^n}$; $\frac{7}{8z^2}+\frac{13}{6z}+\frac{7}{2}+3z+z^2$.

(4) Determinare il tipo di singolarità in $z=0$. Nel caso di un polo determinare l'ordine del polo e trovare la parte singolare.

$$(a)\ \frac{\sin z}{z} \qquad (b)\ \frac{1-\cos z}{z} \qquad (c)\ \frac{\log(1+z)}{z^2} \qquad (d)\ \frac{1}{(1-e^z)}$$

$$(e)\ \frac{1}{(e^z-1)^2} \qquad (f)\ \frac{1}{z\,(1-\cos z)} \qquad (g)\ \frac{e^{z^2}}{\sin(2z)\,(1-\cos z)} \qquad (h)\ \frac{z\,(1+z^2)\,e^{e^z}}{\sin(z^2)\,\tanh z}$$

Risp: (d) $-\frac{1}{z}$. (e) $\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}$. (f) $\frac{2}{z^3}+\frac{1}{6z}$. (g) $\frac{1}{z^3}+\frac{7}{4z}$. (h) $\frac{e}{z^2}+\frac{e}{z}$.

(5) Determinare il tipo di singolarità in z_0. Nel caso di un polo determinare l'ordine del polo e trovare la parte singolare.

$$(a)\ \frac{1-\cos z}{z^5}\ \ (z_0=0) \qquad (b)\ \frac{e^z}{z\sinh z}\ \ (z_0=0) \qquad (c)\ \frac{z^2\,e^z}{(\cos z)^3}\ \ (z_0=\pi/2)$$

Risp: (b) $\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}$. (c) $-\frac{e^{\pi/2}\pi^2}{4(z-\pi/2)^3}-\frac{e^{\pi/2}\pi(4+\pi)}{4(z-\pi/2)^2}-\frac{e^{\pi/2}(2+\pi)^2}{4(z-\pi/2)}$

(6) Per ciascuna singolarità di f determinarne la natura e calcolare la corrispondente parte singolare

$$f(z)=\frac{1}{z^2\,\sin z}$$

Risp: $z=0$ polo ordine 3. $f(z)=1/z^3+1/(6z)+\mathcal{O}(z)$. $z=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 0$ polo semplice. $f(z)=(-1)^k/(k\pi)^2\,1/(z-k\pi)+\mathcal{O}(1)$.

(7) Verificare che

$$\frac{e^{z^2}}{\sinh^2 z}=\frac{1}{z^2}+\frac{2}{3}+\frac{7}{30}z^2+\mathcal{O}(z^4)$$

Volta la pagina ☞

[SL] (8) Trovare la parte singolare dello sviluppo in serie di Laurent in $z=0$ di f

$$f(z) = \frac{e^z}{z\,(1-\cos z)}$$

Risp: $f(z) = \frac{2}{z^3} + \frac{2}{z^2} + \frac{7}{6z} + \mathcal{O}(1)$.

(9) Determinare e classificare tutte le singolarità isolate

$$(a)\quad \frac{e^{z-1}\sin z}{z^3(z-4)^5(z-2i)^7} \qquad (b)\quad \frac{\cos(1/z)(z^2-4)^2}{\sin(\pi z)^3\, e^{z^2}} \qquad (c)\quad \frac{(z^4-1)\exp\left(\frac{1}{z+2}\right)}{e^{\pi z}+1}$$

Risp: (a) $z=0$ polo 2, $z=4$ polo 5, $z=2i$ polo 7. (b) $z=0$ essenziale, $z=k$, k intero $k\notin\{0,-2,2\}$, polo 3, $z=\pm2$ polo 1. (c) $z=i(2k+1)$, $k\notin\{-1,0\}$ polo 1, $z=\pm i$ eliminabile, $z=-2$ essenziale.

(10) Determinare l'ordine m del polo in $z=0$. Dovendo calcolare la parte singolare dello sviluppo di Laurent di f in $z=0$, è necessario sviluppare $\sin z$ in serie di potenze fino all'ordine z^n (incluso). Determinare n.

$$(a)\quad f(z)=\frac{1}{z^4\,\sin z} \qquad (b)\quad f(z)=\frac{\sin z}{z^4} \qquad (c)\quad f(z)=\frac{1}{(\sin z)^4}$$

$$(d)\quad f(z)=\frac{1}{z-\sin z} \qquad (e)\quad f(z)=\frac{z}{(1-\cos z)\,(z-\sin z)}$$

Risp: (a) $m=5,\ n=5$. (b) $m=3,\ n=3$. (c) $m=4,\ n=3$. (d) $m=3,\ n=5$. (e) $m=4,\ n=5$.

(11) Trovare la parte singolare dello sviluppo di Laurent con centro in (a) $z=0$, (b) $z=i\pi$, della funzione

$$f(z)=\frac{e^z}{z\,(\sinh z)^3}$$

Risp: (a) $\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^3}-\frac{1}{3z}+\underline{\mathcal{O}}(1)$ (b) $\frac{1}{i\pi}\frac{1}{(z-i\pi)^3}+\frac{1-i\pi}{\pi^2}\frac{1}{(z-i\pi)^2}+\frac{\pi+i}{\pi^3}\frac{1}{z-i\pi}+\underline{\mathcal{O}}(1)$.

[SL] (12) Determinare le singolarità isolate, la loro natura, e, per i poli, trovare l'ordine.

$$(a)\quad \frac{z^2(z^2-4)}{1-\cos(2\pi z)} \qquad (b)\quad \frac{\sin(1/z)}{z^2(z^2+1)}$$

Risp: (a) $z=0$ eliminabile, $z=2$ e $z=-2$ poli di ordine 1, $z=k$ con $k\in\mathbb{Z}\backslash\{0,2,-2\}$ polo di ordine 2. (b) $z=0$ essenziale $z=i$ e $z=-i$ poli di ordine 1.

11-12/S1 (13) Determinare tutte le singolarità isolate, la loro natura, e, per i poli, trovare l'ordine.

$$(a)\quad \frac{e^{i\pi z/3}-1}{z\,(z^2+4)^2\,(z-6)^3} \qquad (b)\quad \frac{1}{e^{\sin z}} \qquad (c)\quad \frac{1}{\sin(z^2)}\,.$$

Risp: (a) $z=0$ eliminabile, $z=\pm2i$ polo di ordine 2, $z=6$ polo di ordine 2. (b) Non ci sono singolarità. (c) $z=0$ polo di ordine 2, $z=\pm\sqrt{k\pi}$, $k=1,2,3,\ldots$, polo di ordine 1, $z=\pm i\sqrt{k\pi}$, $k=1,2,3,\ldots$, polo di ordine 1.