Tecniche di integrazione

11-12/E2 (1) Calcolare

$$(a)\quad \int_{|z|=3/2} \frac{\cot(\pi z)}{(z-1/4)^2}\,dz \qquad\qquad (b)\quad \int_{|z|=1} \frac{z^2(2z^2+3)}{3z^5+1}\,e^{1/z}\,dz$$

Risp: (a) $i\left[32\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}\right)-4\pi^2\right]$. (b) $\frac{4\pi i}{3}$.

(2) Verificare che

$$\int_{|z|=4}\left(z+\frac{1}{z^2}\right)^3\cos(1/z)\,dz = \frac{\pi i}{12}$$

(3) Calcolare

$$(a)\ \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2} \qquad (b)\ \int_{-\infty}^\infty \frac{x\,dx}{(x^2+1)\,(x^2+2x+2)} \qquad (c)\ \int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$$

$$(d)\ \int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1} \qquad (e)\ \int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2+9)\,(x^2+4)^2} \qquad (f)\ \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+1)\,(x^2-4x+13)}$$

$$(g)\ \int_{-\infty}^\infty \frac{(x+3)\,dx}{(x+i)^2\,(x+3+2i)^3}$$

Risp: (a) $\pi/4$. (b) $-\pi/5$. (c) $\pi/(2\sqrt{2})$. (d) $2\pi/(3\sqrt{3})$. (e) $\pi/200$. (f) $\pi/15$. (g) 0.

(4) Verificare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{((x-a)^2+b^2)^2} = \frac{\pi a}{2b^3} \qquad a>0,\ b>0\,.$$

(5) Calcolare

$$(a)\ \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x\,dx}{x^2+4x+5}\,dx \qquad (b)\ \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x\,dx}{x^2-6x+10} \qquad (c)\ \int_0^\infty \frac{\cos(ax)\,dx}{(x^2+1)^2}\ (a>0)$$

$$(d)\ \int_{-\infty}^\infty \frac{x\,\sin(ax)}{x^4+4}\,dx\ (a>0)$$

Risp: (a) $-\frac{\pi}{e}\sin 2$. (c) $\frac{\pi}{4}(1+a)\,e^{-a}$. (d) $\frac{\pi}{2}e^{-a}\sin a$.

[TI] (6) Si consideri l'integrale

$$I := \int_0^\infty \frac{x\,\sin x\,dx}{x^4+1}\,.$$

(a) Scrivere chiaramente la relazione che lega la quantità I al valore di alcuni residui di un'opportuna funzione complessa
(b) Calcolare I semplificando il risultato il più possibile.

Risp: $\frac{\pi}{2}\sin(1/\sqrt{2})e^{-1/\sqrt{2}}$

13-14/S1 (7) Calcolare

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x\,dx}{(x^2-2x+2)^2}\,.$$

Risp: $\pi\cos(1)/e$.

(8) Verificare che, se $k\in\mathbb{Z}$, $k\geq 2$, si ha

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^k+1} = \frac{\pi/k}{\sin(\pi/k)}\,.$$

Volta la pagina ☞

(9) Verificare che, se $n \in \mathbb{N}^*$, si ha

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{\pi(2n-2)!}{2^{2n-1}((n-1)!)^2} = \frac{\pi(2n-3)!!}{2^n(n-1)!}$$

☆ (10) Siano m e n due interi tali che $0 \leq m < n$. Dimostrare che

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}\, dx = \frac{\pi}{2n} \csc\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right)$$

Sugg: sfruttando la parità dell'integrando si ottiene

$$I = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}\, dx = (\pi i) \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Res}(f, z_k)$$

in cui $(z_k)_{k=0}^{n-1}$ sono le soluzioni dell'equazione $z^{2n}+1=0$ che si trovano nel semipiano superiore. A questo punto bisogna avere solo un po' di fiducia (nella forza). A proposito, $\csc(z) := 1/\sin(z)$.

(11) Dato $\vartheta \in [0, 2\pi)$, si consideri la semiretta γ_ϑ, uscente dall'origine ad angolo ϑ

$$\gamma_\vartheta(t) = te^{i\vartheta} \qquad\qquad t \in [0,\infty)\,.$$

Per ciascuna delle seguenti funzioni f calcolare, al variare di ϑ, $\ell(\vartheta) := \lim_{t\to+\infty} |f(\gamma_\vartheta(t))|$

(a) $\exp(iz)$ $\qquad$ (b) $\exp(-z^2)$ $\qquad$ (c) $\exp(iz^2)$

Risp: (a) $\ell(0) = \ell(\pi) = 1$; se $\vartheta \in (0,\pi)$, $\ell(\vartheta) = 0$ se $\vartheta \in (\pi, 2\pi)$, $\ell(\vartheta) = +\infty$.

(12) Verificare che, se $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha

$$(a) \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-i\lambda x}}{x^2+1}\, dx = \pi e^{-|\lambda|} \qquad\qquad (b) \quad \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2-i\lambda x}\, dx = \sqrt{\pi} e^{-\lambda^2/4}\,.$$

[(b). Sugg: integrare la funzione $f(z) = e^{-z^2}$ lungo il rettangolo $[-a, a, a+ib, -a-ib, a]$. Scegliere opportunamente b e fare il limite $a \to \infty$.]

☆ (13) Verificare che

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\,.$$

[Sugg: integrare la funzione e^{iz^2} lungo un cammino chiuso che va da 0 a R, poi percorre un ottavo di circonferenza (fino a $\pi/4$) e torna all'origine).]