Distribuzioni/2

(1) Sia $F(x) = H(x)\, e^{-x^2/2}$, in cui H è la funzione a gradino di Heaviside e sia $G = F'' + (1-x^2)F$, nel senso delle distribuzioni.

(a) Calcolare G.

(b) Calcolare $D^n G$ per n intero positivo arbitrario.

Risp: (a) δ_0'. (b) $\delta_0^{(n+1)}$.

[RUDIM] (2) Siano n e k due interi positivi arbitrati e sia

$$g_n(x) := H(x)\frac{x^n}{n!}\,.$$

Calcolare, nel senso delle distribuzioni, $D^k g_n$ (Sugg: considerare separatamente i casi (1) $k < n$, (2) $k = n$ e (3) $k > n$).

(3) Sia $F(x) := H(x)e^{-x}$ in cui H è la funzione a gradino di Heaviside. Calcolare, nel senso delle distribuzioni, $F''' + F''$, semplificando il più possibile il risultato.

Risp: δ_0''.

(4) Verificare le seguenti identità riguardanti la "funzione composta" $\delta(b(x))$.

(a) $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\,\delta(x)$, con $a \in \mathbb{R}$

(b) $\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|}\,[\delta(x-a) + \delta(x+a)]$, con $a \in \mathbb{R}$.

(c) $\delta(x^3 - a^3) = \frac{1}{3a^2}\,\delta(x-a)$, con $a \in \mathbb{R}$.

(d) $\delta(\sin x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(x - k\pi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{k\pi}$

(e) $\delta(\cos x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(x - (k+1/2)\pi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{(k+1/2)\pi}$

(f) $\delta(\sinh x) = \delta(x)$

(g) $\delta(\arctan x) = \delta(x)$

(h) $\delta(e^{-x^2}) = 0$

(i) $\delta(\sin(1+x^2)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{k\pi - 1}}\,\left[\delta(x - \sqrt{k\pi-1}) + \delta(x + \sqrt{k\pi - 1})\right]$

(5) Calcolare il seguente integrale scritto nella notazione "dei fisici"

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(\sin(x^2+1))\,dx$$

Risp: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{k\pi-1}}\left[f(\sqrt{k\pi-1}) + f(-\sqrt{k\pi-1})\right]$

(6) Calcolare il seguente integrale scritto nella notazione "dei fisici", semplificando il più possibile il risultato.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,\delta(\sin(2x))\,dx$$

Risp: $\frac{1}{1-e^{-\pi/2}} - \frac{1}{2}$.

(7) Calcolare il seguente integrale scritto nella notazione "dei fisici", in cui compare la "funzione composta della delta di Dirac", semplificando il più possibile il risultato.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\cos(\pi x))}{x^2}\,dx$$

Risp: $\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1/2)^2}$.

10-11/S1 (8) Calcolare il seguente integrale scritto nella notazione "dei fisici", in cui compare la "funzione composta della delta di Dirac", semplificando il più possibile il risultato (il risultato è un numero reale).

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\pi/3}\,\delta(x^3 - x)\,dx$$

Risp: 3/2.

Volta la pagina ☞

10-11/S2 (9) Sia n un intero positivo pari, $n = 2, 4, 6, \ldots$. Calcolare il seguente integrale scritto nella notazione "dei fisici", in cui compare la "funzione composta della delta di Dirac", semplificando il più possibile il risultato.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi x)\, \delta(x^n - x)\, dx$$

Risp: $\frac{n-2}{n-1}$.

11-12/S1 (10) Calcolare il seguente integrale scritto nella notazione "dei fisici", in cui compare la "funzione composta della delta di Dirac", semplificando il più possibile il risultato.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi x)\, \delta((x-1)(e^x - 1))\, dx\,.$$

Risp: $\frac{e-2}{e-1}$.

12-13/S2 (11) Calcolare il seguente integrale scritto nella notazione "dei fisici", in cui compare la "funzione composta della delta di Dirac", semplificando il più possibile il risultato (fornire, se possibile, una risposta numerica)

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2^{-|x|}\, \delta\Big(\cos\Big(\frac{\pi x}{3}\Big) - \frac{1}{2}\Big)\, dx\,.$$

Risp: $\frac{136\sqrt{3}}{63\pi}$.

(12) Verificare le seguenti trasformate di Fourier di distribuzioni (nel seguito a denota un numero reale e n denota un numero intero positivo)

(a) $\mathcal{F}\left[\delta_a\right](\lambda) = e^{-ia\lambda}$ $\qquad$ (b) $\mathcal{F}\left[e^{iax}\right](\lambda) = 2\pi\,\delta(\lambda - a)$

(c) $\mathcal{F}\left[x^n\right](\lambda) = 2\pi\, i^n\, \delta^{(n)}(\lambda)$ $\qquad$ (d) $\mathcal{F}\left[P(1/x)\right](\lambda) = -i\pi\,\mathrm{sgn}(\lambda)$

(e) $\mathcal{F}\left[\mathrm{sgn}(x)\right](\lambda) = -2iP(1/\lambda)$ $\qquad$ (f) $\mathcal{F}\left[H(x)\right](\lambda) = -iP(1/\lambda) + \pi\,\delta_0$

Circuiti

☆ (13) In un reticolo quadrato infinito $\mathbb{Z}^2$, ogni coppia di nodi primi vicini è collegata con una resistenza da 1 ohm. Determinare la resistenza equivalente del circuito visto da una coppia di primi vicini. In altre parole, se i due poli di un generatore di tensione continua V vengono collegati ad una coppia di nodi primi vicini, quanta corrente passa nei cavi che collegano il generatore al reticolo? (Sugg: non mettersi a fare serie e paralleli).