Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S1

Filippo Cesi – 2016–17

Nome	
Cognome	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
totale	
test	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risultato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (6 pt).[1] Calcolare il raggio di convergenza delle serie di potenze

$$(a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\, z^{2n} \qquad\qquad (b)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (1-3i)^n z^n\,.$$

Risp: (a) 1/2. (b) $1/\sqrt{10}$.

(2) (6 pt). Calcolare

$$\int_{|z-2i|=3} \frac{dz}{z(e^z+1)^2}$$

Soluzione. Le singolarità dell'integrando sono

$$z=0,\ \text{polo di ordine 1} \qquad\qquad z=i\pi(1+2k),\ \text{con } k\in\mathbb{Z},\ \text{polo di ordine 2}$$

Le uniche singolarità che si trovano all'interno del cammino di integrazione sono

$$z=0 \qquad \text{e} \qquad z=i\pi\,,$$

quindi, denotando con f l'integrando, si ha

$$I := \int_{|z-2i|=3} \frac{dz}{z(e^z+1)^2} = 2\pi i\Big[\mathrm{Res}(f,0)+\mathrm{Res}(f,i\pi)\Big]\,.$$

Calcolo dunque i residui

$$\mathrm{Res}(f,0) = \frac{1}{(e^0+1)^2} = \frac{1}{4}\,.$$

Per calcolare il residuo in $i\pi$ trovo la parte singolare della serie di Laurent di f in questo punto. Cambio variabile ponendo $z=i\pi+w$ e ottengo

$$f(z) = \frac{1}{i\pi}\frac{1}{w^2} + \frac{1+i\pi}{\pi^2}\frac{1}{w} + \mathcal{O}(1)\,,$$

che implica

$$\mathrm{Res}(f,i\pi) = \frac{1+i\pi}{\pi^2}\,.$$

Di conseguenza ottengo

$$I = 2\pi i\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{\pi^2}+\frac{i}{\pi}\right) = i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\right) - 2\,.$$

(3) (6 pt). Calcolare il seguente integrale esprimendo il risultato in termini di quantità palesemente reali.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+6x+12}\,dx\,.$$

Risp: $\frac{2^{4/3}}{3^{5/6}}\,\pi\,\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$.

[1] 1 pt = 0.5 voto

(4) (6 pt). Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni, riconducendosi, se possibile, a casi noti

$$(a)\quad f(x) = xe^{-|2x-7|} \qquad\qquad (b)\quad f(x) = \frac{x\,e^{3ix}}{x^2+4x+8}\,.$$

Soluzione. (a) Partendo da una coppia nota f, $\hat{f}$ ed usando le regole di calcolo delle trasformate di Fourier, ottengo

$$\begin{array}{llll} & e^{-|x|} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{2}{1+\lambda^2} \\ [x \to 2x-7] & e^{-|2x-7|} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{e^{-i7\lambda/2}}{1+\lambda^2/4} = \dfrac{4e^{-7i\lambda/2}}{4+\lambda^2} \\ [f(x) \to xf(x)] & xe^{-|2x-7|} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & iD\left[\dfrac{4e^{-i7\lambda/2}}{4+\lambda^2}\right] \\ & xe^{-|2x-7|} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & 2e^{-\frac{7i\lambda}{2}}\,\dfrac{7\lambda^2-4i\lambda+28}{(\lambda^2+4)^2} \end{array}$$

(b) Partendo da una coppia nota f, $\hat{f}$ ed usando le regole di calcolo delle trasformate di Fourier, ottengo

$$\begin{array}{llll} & \dfrac{1}{a^2+x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{\pi}{a}e^{-a|\lambda|} \\ [x \to x+2] & \dfrac{1}{x^2+4x+4+a^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{\pi}{a}e^{-a|\lambda|+2i\lambda} \\ [a=2] & \dfrac{1}{x^2+4x+8} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{\pi}{2}e^{-2|\lambda|+2i\lambda} \\ [f(x) \to xf(x)] & \dfrac{x}{x^2+4x+8} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & -\pi e^{-2|\lambda|+2i\lambda}\,(1+i\,\mathrm{sgn}(\lambda)) \\ [f(x) \to e^{i3x}f(x)] & \dfrac{x\,e^{3ix}}{x^2+4x+8} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & -\pi e^{-2|\lambda-3|+2i(\lambda-3)}\,(1+i\,\mathrm{sgn}(\lambda-3)) \end{array}$$

(5) (6 pt). Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato (n è un intero, $n \geq 2$).

$$(a)\quad D^2(\cos x\,e^{-|x|}) + 2\delta_0 \qquad\qquad (b)\quad D^3\left((1+x)^n\,\delta_0^{(2)}\right)\,.$$

Schema di soluzione.(a) Si ha

$$D\big(\cos x\,e^{-|x|}\big) = e^{-|x|}\,(-\sin x - \cos x\,\mathrm{sgn}\,x)\,.$$

Derivando ancora si ottiene

$$\begin{aligned} D^2\big(\cos x\,e^{-|x|}\big) &= e^{-|x|}\,(-\cos x + \sin x\,\mathrm{sgn}\,x - 2\cos x\,\delta_0 + \sin x\,\mathrm{sgn}\,x + \cos x) \\ &= 2e^{-|x|}\sin|x| - 2e^{-|x|}\cos x\,\delta_0 \\ &= 2e^{-|x|}\sin|x| - 2\delta_0\,. \end{aligned}$$

Quindi

$$D^2(\cos x\,e^{-|x|}) + 2\delta_0 = 2e^{-|x|}\sin|x|\,.$$

(b) Risp: $\delta_0^{(5)} - 2n\delta_0^{(4)} + n(n-1)\delta_0^{(3)}$.

(6) (6 pt). Sia

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\, \delta(x^5 - x)\, dx \qquad \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

Calcolare il valore massimo di $I(\alpha)$ per $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione. La funzione $b(x) := x^5 - x$ si annulla nei punti

$$x^5 - x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0, \pm 1\,.$$

Inoltre si ha

$$b'(x) = 5x^4 - 1 \qquad\qquad |b'(0)| = 1 \qquad\qquad |b'(\pm 1)| = 4$$

da cui si ottiene

$$\delta(x^5 - x) = \delta_0 + (\delta_1 + \delta_{-1})/4\,.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\, \delta(x^5 - x)\, dx &= \delta_0(e^{i\alpha x}) + \frac{1}{4}\big[\delta_1(e^{i\alpha x}) + \delta_{-1}(e^{i\alpha x})\big] \\ &= 1 + \frac{1}{4}\big(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}\big) = 1 + \frac{1}{2}\cos(\alpha)\,.\end{aligned}$$

Quindi

$$\max_{\alpha \in \mathbb{R}} I(\alpha) = 3/2\,.$$

(7) (6 pt). Se l'affermazione è vera dire semplicemente che è vera, se è falsa esibire un controesempio *esplicito e concreto*. Nel seguito $f \in L_1(\mathbb{R})$ e $\hat{f}$ è la trasformata di Fourier di f.

(a) Se f è differenziabile, $\hat{f}$ è differenziabile.
(b) Se f è a supporto compatto, $\hat{f}$ è a supporto compatto.
(c) Se f è dispari, $\hat{f}$ è dispari.
(d) Se f è reale, $\hat{f}$ è reale.

Soluzione. (a) Falso. Controesempio: $f(x) = 1/(1 + x^2)$, $\hat{f}(\lambda) = \pi e^{-|\lambda|}$. (b) Falso. Controesempio: $f(x) = \mathrm{rect}(x)$, $\hat{f}(\lambda) = \mathrm{sinc}(\lambda/(2\pi))$. (c) Vero. (d) Falso. Controesempio: $f(x) = H(x)e^{-x}$, $\hat{f}(\lambda) = 1/(1 + i\lambda)$.

(8) (6 pt). Calcolare la trasformata di Fourier della distribuzione $P(1/x)$.

Soluzione. Fatto in classe.

(9) (6 pt). Enunciare e dimostrare il teorema sul residuo all'infinito.