# Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S3

Filippo Cesi – 2016–17

| | |
|---|---|
| Nome | |
| Cognome | |

| problema | voto |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |
| 8 | |
| 9 | |
| 10 | |
| test | |
| totale | |
| voto in trentesimi | |

**Regolamento:**

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (6 pt) [1]. Calcolare il raggio di convergenza delle serie di potenze

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!\, e^{3n}} z^n \qquad\qquad (b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^3\, z^{2n}$$

*Risp:* (a) $e^2$. (b) 1.

(2) (5 pt). Calcolare l'integrale

$$\int_{|z-1|=2} \frac{dz}{z\,(e^{i\pi z}-1)}$$

*Schema di soluzione.* Sia

$$f(z) = \frac{1}{z\,(e^{i\pi z}-1)}\,.$$

La funzione $f$ ha le seguenti singolarità isolate

$$\begin{array}{ll} z_0 = 0 & \text{polo di ordine 2} \\ z_k = 2k,\ k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0 & \text{polo di ordine 1} \end{array}$$

Le singolarità interne al cammino di integrazione sono $z_0 = 0$ e $z_1 = 2$. Si calcola facilmente

$$\operatorname{Res}(f,0) = -\frac{1}{2} \qquad\qquad \operatorname{Res}(f,2) = -\frac{i}{2\pi}\,.$$

Quindi

$$\int_{|z-1|=2} \frac{dz}{z\,(e^{i\pi z}-1)} = 2\pi i\left[\operatorname{Res}(f,0) + \operatorname{Res}(f,2\pi)\right] = 1 - i\pi\,.$$

(3) (5 pt). Calcolare l'integrale

$$\int_{|z|=1} \frac{z^3\left(2z^2+z+1\right)}{z^5-2}\,dz$$

*Soluzione.* Poichè l'integrando è analitico su un aperto che contiene la traccia del cammino di integrazione (le singolarità sono tutte esterne al cammino $|z| = 1$), l'integrale è nullo.

(4) (5 pt). Calcolare il seguente integrale esprimendo il risultato in termini di quantità palesemente reali.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{x^2+6x+18}\,dx$$

*Risp:* $\frac{2^{5/8}}{3^{3/4}}\,\pi\,\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)$.

---

[1] 1 pt = 0.5 voto

(5) (6 pt). Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni, riconducendosi, se possibile, a casi noti

$$(a)\quad x^2\, e^{-|x|} \qquad\qquad (b)\quad \frac{1}{(x+i)^3}$$

*Soluzione.* (a) Sia $g(x) := e^{-|x|}$. So che $\hat{g}(\lambda) = 2/(1+\lambda^2)$. Quindi

$$\hat{f}(\lambda) = \mathcal{F}[x^2\, g(x)](\lambda) = i^2\, D^2\, [\hat{g}(\lambda)] = -D^2 \left[\frac{2}{1+\lambda^2}\right] = \frac{4(1-3\lambda^2)}{(\lambda^2+1)^3}\,.$$

(b) Partendo da una coppia nota $f$, $\hat{f}$ ed usando le regole di calcolo delle trasformate di Fourier, ottengo

$$\begin{array}{lccc}
 & H(x)\, e^{-x} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{1}{1+i\lambda} \\
 & \dfrac{1}{1+ix} & \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} & H(\lambda)\, e^{-\lambda} \\
[\mathcal{F}^{-1} = (\mathcal{F}\circ P)/(2\pi)] & \dfrac{1}{1+ix} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & 2\pi H(-\lambda)\, e^{\lambda} \\
[x \to (-x)] & \dfrac{1}{1-ix} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & 2\pi H(\lambda)\, e^{-\lambda} \\
[f \to (-i)f] & \dfrac{1}{x+i} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & -\,2i\pi H(\lambda)\, e^{-\lambda} \\
[f \to f''] & \dfrac{2}{(x+i)^3} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & 2i\pi\lambda^2 H(\lambda)\, e^{-\lambda} \\
[f \to f/2] & \dfrac{1}{(x+i)^3} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & i\pi\lambda^2 H(\lambda)\, e^{-\lambda}
\end{array}$$

(6) (5 pt). Sia $F(x) := H(x)\cos(x)$ in cui $H$ è la funzione a gradino di Heaviside. Calcolare, nel senso delle distribuzioni, $D^4F + D^2F$, semplificando il più possibile il risultato.

*Soluzione.* Si ha

$$\begin{aligned} F'(x) &= \cos(x)\,\delta_0 - H(x)\sin(x) = \delta_0 - H(x)\sin(x) \\ F''(x) &= \delta_0' - \sin(x)\delta_0 - H(x)\cos(x) = \delta_0' - F(x)\,. \end{aligned}$$

Derivando si ottiene

$$\begin{aligned} F'''(x) &= \delta_0'' - F'(x) \\ D^4F(x) &= \delta_0^{(3)} - F''(x) \end{aligned}$$

Quindi

$$D^4F(x) + D^2F(x) = \delta_0^{(3)}\,.$$

(7) (6 pt). Calcolare il seguente integrale scritto nella notazione "dei fisici", in cui compare la "funzione composta della delta di Dirac", semplificando il più possibile il risultato.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi x)\, \delta\left((x^2-1)(e^{3x}-1)\right)\, dx\,.$$

*Soluzione.* Sia $b(x) := (x^2-1)\,(e^{3x}-1)$. La funzione $b$ si annulla in $x=0$ e $x=\pm 1$. Inoltre

$$b'(x) = 2x\left(e^{3x}-1\right) + 3(x^2-1)e^{3x} = e^{3x}\left(3x^2+2x-3\right) - 2x\,.$$

Dunque

$$|b'(0)| = 3 \qquad\qquad |b'(1)| = 2(e^3 - 1) \qquad\qquad |b'(-1)| = -2e^{-3} + 2 = \frac{2(e^3-1)}{e^3}$$

Per definizione di funzione composta della delta di Dirac, otteniamo

$$\delta(b(x)) = \frac{\delta_0}{|b'(0)|} + \frac{\delta_1}{|b'(1)|} + \frac{\delta_{-1}}{|b'(-1)|} = \frac{\delta_0}{3} + \frac{\delta_1}{2(e^3-1)} + \frac{e^3}{2(e^3-1)}\delta_{-1}\,.$$

In questo modo si ottiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi x)\,\delta((x-1)(e^{3x}-1))\,dx = \frac{\cos(0)}{3} + \frac{1}{2(e^3-1)}\cos(\pi) + \frac{e^3}{2(e^3-1)}\cos(-\pi)$$
$$= \frac{1}{3} - \frac{e^3+1}{2(e^3-1)} = -\frac{e^3+5}{6(e^3-1)}\,.$$

(8) (5 pt). Consideriamo lo sviluppo in serie di Fourier in $[-\pi,\pi]$ della funzione $f(x) = H(x)\,\cos(x/3)$

$$H(x)\,\cos(x/3) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] \qquad x \in [-\pi,\pi]\,.$$

Calcolare: (a) $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k$; (b) $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$; (c) $\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[|a_k|^2 + |b_k|^2\right]$.

*Soluzione.* (a) Sfruttando il teorema sulla convergenza puntuale della serie di Fourier in $x = 0$ ottengo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{1}{2}(f(0^+) + f(0^-)) = \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}\,.$$

(b) Sfruttando il teorema sulla convergenza puntuale della serie di Fourier in $x = \pi$ ottengo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\kappa\pi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k = \frac{1}{2}(f(\pi) + f(-\pi)) = \frac{1}{2}\,(\cos(\pi/3) + 0) = \frac{1}{4}\,.$$

(c) Dall'uguaglianza di Parseval segue

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[|a_k|^2 + |b_k|^2\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2(x/3)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1+\cos(2x/3)}{2}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(\pi + \frac{3}{2}\big[\sin(2x/3)\big]_0^{\pi}\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(\pi + \frac{3}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{8\pi}\,.$$

(9) (6 pt). Enunciare e dimostrare il teorema di Liouville.

(10) (5 pt). Sia $H_n$ l'ennesimo polinomio di Hermite e sia $\psi_n$ la corrispondente *funzione di Hermite* definita come

$$\psi_n(x) := C_n\, e^{-x^2/2} H_n(x) \qquad \text{in cui } C_n = (\sqrt{\pi}\,2^n\,n!)^{-1/2}.$$

Ricordando che vale la relazione

$$H_n'(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)\,, \tag{①}$$

si dimostri che $\psi_n$ è un autofunzione dell'operatore trasformata di Fourier con autovalore $\sqrt{2\pi}(-i)^n$, vale a dire

$$\mathcal{F}[\psi_n] = \sqrt{2\pi}(-i)^n \, \psi_n \, . \qquad ②$$

(Sugg: Dalla ① segue che $\psi_{n+1} = [2(n+1)]^{-1/2} \, (x\psi_n - \psi_n')$. Usando le proprietà della trasformata di Fourier si ottiene una relazione analoga fra $\hat{\psi}_{n+1}$ e $\hat{\psi}_n$. A questo punto è semplice dimostrare la ② per induzione).