Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S4

Filippo Cesi – 2016–17

Nome	
Cognome	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
test	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (6 pt) [1]. Calcolare il raggio di convergenza delle serie di potenze

$$(a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} n\exp(in^2)z^n \qquad\qquad (b)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\, z^n$$

Risp: (a) 1. (b) 1/4.

(2) (5 pt). Calcolare l'integrale

$$\int\limits_{|z+1|=2} \frac{dz}{z\,(e^{i\pi z}-1)}$$

Schema di soluzione. Sia

$$f(z) = \frac{1}{z\,(e^{i\pi z}-1)}\,.$$

La funzione f ha le seguenti singolarità isolate

$$\begin{aligned} &z_0 = 0 && \text{polo di ordine 2} \\ &z_k = 2k,\ k\in\mathbb{Z},\ k\neq 0 && \text{polo di ordine 1} \end{aligned}$$

Le singolarità interne al cammino di integrazione sono $z_0 = 0$ e $z_1 = -2$. Si calcola facilmente

$$\operatorname{Res}(f,0) = -\frac{1}{2} \qquad\qquad \operatorname{Res}(f,2) = \frac{i}{2\pi}\,.$$

Quindi

$$\int\limits_{|z+1|=2} \frac{dz}{z\,(e^{i\pi z}-1)} = 2\pi i\left[\operatorname{Res}(f,0)+\operatorname{Res}(f,2\pi)\right] = -1-i\pi\,.$$

(3) (5 pt). Calcolare l'integrale

$$\int\limits_{|z|=4} \frac{z^3\left(2z^2+z+1\right)}{z^5-2}\,dz$$

Schema di soluzione. Poiché non ci sono singolarità all'esterno del cammino di integrazione posso usare il metodo del residuo all'infinito. In questo modo si ottiene facilmente

$$\int_{|z|=1} f(z)\,dz = 2\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right] = 2\pi i\,.$$

(4) (5 pt). Calcolare il seguente integrale esprimendo il risultato in termini di quantità palesemente reali.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+6x+18}\,dx$$

Risp: $(\frac{2}{3})^{7/6}\pi\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

[1] 1 pt = 0.5 voto

(5) (6 pt). Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni, riconducendosi, se possibile, a casi noti

$$(a)\quad xe^{-x}H(x-2) \qquad\qquad (b)\quad \frac{x\,e^{5ix}}{x^2+2x+10}$$

Soluzione. (a) Partendo ad una coppia nota f, $\hat{f}$ ed usando le regole di calcolo delle trasformate di Fourier, ottengo

$$\begin{array}{llcl}
 & H(x)\,e^{-x} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{1}{1+i\lambda} \\
[x\to x-2] & H(x-2)\,e^{-x+2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{e^{-2i\lambda}}{1+i\lambda} \\
[f(x)\to xf(x)] & H(x-2)\,x\,e^{-x+2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & ie^{-2i\lambda}\,\dfrac{2\lambda-3i}{(1+i\lambda)^2} \\
[f(x)\to e^{-2}\,f(x)] & H(x-2)\,x\,e^{-x} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & e^{-2i\lambda-2}\,\dfrac{3+2i\lambda}{(1+i\lambda)^2}
\end{array}$$

(b) Partendo da una coppia nota f, $\hat{f}$ ed usando le regole di calcolo delle trasformate di Fourier, ottengo

$$\begin{array}{llcl}
 & \dfrac{1}{a^2+x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{\pi}{a}e^{-a|\lambda|} \\
[x\to x+1] & \dfrac{1}{x^2+2x+1+a^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{\pi}{a}e^{-a|\lambda|+i\lambda} \\
[a=3] & \dfrac{1}{x^2+2x+10} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{\pi}{3}e^{-3|\lambda|+i\lambda} \\
[f(x)\to xf(x)] & \dfrac{x}{x^2+2x+10} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & -\dfrac{\pi}{3}e^{-3|\lambda|+i\lambda}\,(1+3i\,\mathrm{sgn}(\lambda)) \\
[f(x)\to e^{i5x}f(x)] & \dfrac{x\,e^{5ix}}{x^2+2x+10} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & -\dfrac{\pi}{3}e^{-3|\lambda-5|+i(\lambda-5)}\,(1+3i\,\mathrm{sgn}(\lambda-5))
\end{array}$$

(6) (5 pt). Calcolare la seguente distribuzione, semplificando il più possibile il risultato

$$D^2\left(|4-x^2|\right).$$

Risp: $2\,\mathrm{sgn}(4-x^2)+8\,(\delta_2+\delta_{-2})$. Vedi esercizio simile in 12-13/S1.

(7) (6 pt). Calcolare il seguente integrale scritto nella notazione “dei fisici”, in cui compare la “funzione composta della delta di Dirac”, semplificando il più possibile il risultato (il risultato è un numero reale).

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\pi/4}\,\delta(x^3-x)\,dx$$

Risp: $1+1/\sqrt{2}$. Vedi esercizio simile in 10-11/S1.

(8) (5 pt). Consideriamo lo sviluppo in serie di Fourier in $[-\pi,\pi]$ della funzione $f(x)=H(x)\,e^{-2x}$

$$H(x)\,e^{-2x}\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\right]\qquad x\in[-\pi,\pi].$$

Calcolare: (a) $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k$; (b) $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$; (c) $\frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[|a_k|^2+|b_k|^2\right]$. [Sugg: non è necessario calcolare i coefficienti a_k e b_k].

Soluzione. (a) Sfruttando il teorema sulla convergenza puntuale della serie di Fourier in $x=0$ ottengo

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\frac{1}{2}(f(0^+)+f(0^-))=\frac{1}{2}(1+0)=\frac{1}{2}\,.$$

(b) Sfruttando il teorema sulla convergenza puntuale della serie di Fourier in $x=\pi$ ottengo

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos(\kappa\pi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k=\frac{1}{2}(f(\pi)+f(-\pi))=\frac{1}{2}\left(e^{-2\pi}+0\right)=\frac{e^{-2\pi}}{2}\,.$$

(c) Dall'uguaglianza di Parseval segue

$$\begin{aligned}\frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[|a_k|^2+|b_k|^2\right]&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{-4x}\,dx=\frac{e^{-4x}}{4\pi}\Big|_{\pi}^{0}=\frac{1}{4\pi}\left(1-e^{-4\pi}\right)\,.\end{aligned}$$

(9) (6 pt). Enunciare e dimostrare il teorema Fondamentale dell'Algebra.

(10) (5 pt). Sia H_n l'ennesimo polinomio di Hermite e sia ψ_n la corrispondente *funzione di Hermite* definita come

$$\psi_n(x):=C_n\,e^{-x^2/2}H_n(x)\qquad\text{in cui } C_n=(\sqrt{\pi}\,2^n\,n!)^{-1/2}.$$

Ricordando che vale la relazione

$$H_n'(x)=2xH_n(x)-H_{n+1}(x)\,,\qquad ①$$

si dimostri che ψ_n è un autofunzione dell'operatore trasformata di Fourier con autovalore $\sqrt{2\pi}(-i)^n$, vale a dire

$$\mathcal{F}[\psi_n]=\sqrt{2\pi}(-i)^n\,\psi_n\,.\qquad ②$$

(Sugg: Dalla ① segue che $\psi_{n+1}=[2(n+1)]^{-1/2}\,(x\psi_n-\psi_n')$. Usando le proprietà della trasformata di Fourier si ottiene una relazione analoga fra $\hat{\psi}_{n+1}$ e $\hat{\psi}_n$. A questo punto è semplice dimostrare la ② per induzione).