Modelli e Metodi Matematici della Fisica. E1

Filippo Cesi – 2017–18

Nome	SOLUZIONI
Cognome	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
test	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (1 pt[1]). Scrivere sul frontespizio nome e cognome in stampatello, nelle apposite caselle. Ripeto, in STAMPATELLO.

(2) (8 pt). Calcolare il raggio di convergenza

$$(a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} n^2(3-i)^n\, z^n \qquad\qquad (b)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}\, z^{2n}\,.$$

Risp: (a) $1/\sqrt{10}$. (b) $1/\sqrt{e}$.

(3) (6 pt). Sia $z = -\sqrt{3} - i$. Usando il ramo principale, calcolare le seguenti espressioni (il risultato deve essere un numero palesemente reale!)

$$(a)\quad |(1+i)^z| \qquad\qquad (b)\quad \mathrm{Re}(z^{-i})$$

Soluzione. Scrivo z e $1+i$ in forma polare

$$z = -\sqrt{3} - i = 2e^{-i5\pi/6} \qquad\qquad 1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}\,.$$

(a). Utilizzando la definizione di potenza con esponente complesso, ottengo

$$\begin{aligned}
|(1+i)^z| &= \big|\exp\big(z\log(1+i)\big)\big| = \exp \mathrm{Re}\,(z\log(1+i)) \\
&= \exp \mathrm{Re}\,\Big((-\sqrt{3}-i)\,(\log|1+i| + i\,\mathrm{Arg}(1+i))\Big) \\
&= \exp \mathrm{Re}\left((-\sqrt{3}-i)\left(\frac{\log 2}{2} + i\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{\sqrt{3}\log 2}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 2^{-\sqrt{3}/2}\, e^{\pi/4}\,.
\end{aligned}$$

(b). Analogamente,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left(z^{-i}\right) &= \mathrm{Re}\exp\left(-i\log z\right) \\
&= \mathrm{Re}\exp\left(-i\left(\log 2 - i\frac{5\pi}{6}\right)\right) \\
&= \mathrm{Re}\exp\left(-i\log 2 - \frac{5\pi}{6}\right) \\
&= \exp\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\cos\left(\log 2\right) \qquad\qquad [\text{uso } \mathrm{Re}\, e^w = e^{\mathrm{Re}\, w}\cos(\mathrm{Im}\, w)]\,.
\end{aligned}$$

(4) (6 pt). Trovare la parte singolare dello sviluppo in serie di Laurent in $z = 0$ di

$$f(z) = \frac{2z - 3z^2}{(e^z - 1)\,\sin^2(z)}\,.$$

Risp: $2/z^2 - 4/z$.

(5) (6 pt). Determinare le singolarità isolate, la loro natura, e, per i poli, trovare l'ordine.

$$f(z) = \frac{(e^z-1)(z^2-9z+20)}{(z-1)\sin^3(\pi z)}$$

Risp: $z = 1$ polo 4, $z \in \{0,4,5\}$ polo 2, $z \in \mathbb{Z}\backslash\{0,1,4,5\}$ polo 3.

[1] 1 pt = 0.5 trentesimi

(6) (7 pt). Calcolare

$$\int_{|z|=4} \frac{z\left(5z^4 - z^3 + 1\right)}{(z+1)^2\,(z^4-2)}\,dz\,.$$

Soluzione. Sia

$$f(z) := \frac{z\left(5z^4 - z^3 + 1\right)}{(z+1)^2\,(z^4-2)}\,.$$

Poiché non ci sono singolarità all'esterno del cammino di integrazione posso usare il metodo del residuo all'infinito. Ponendo

$$g(z) = \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{-z^4 + z - 5}{z(z+1)^2\,(2z^4-1)}\,,$$

si ha

$$\int_{|z|=4} f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(g,0)\,.$$

La funzione g ha un polo semplice in $z=0$ e il corrispettivo residuo è

$$\mathrm{Res}(g,0) = \lim_{z\to 0}(zg(z)) = 5\,,$$

per cui

$$\int_{|z|=4} f(z)\,dz = 10\pi i\,.$$

(7) (7 pt). Calcolare

$$\int\limits_{|z-i/2|=1} \frac{z+2}{z(e^{\pi z}+1)^2}\,dz\,.$$

Soluzione. Le singolarità dell'integrando sono

$z=0$, polo di ordine 1 $\qquad$ $z = i(1+2k)$, con $k\in\mathbb{Z}$, polo di ordine 2

Le uniche singolarità che si trovano all'interno del cammino di integrazione sono

$$z = 0 \qquad \text{e} \qquad z = i\,,$$

quindi, denotando con f l'integrando, si ha

$$I := \int\limits_{|z-i/2|=1} f(z)\,dz = 2\pi i\Big[\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,i)\Big]\,.$$

Calcolo dunque i residui

$$\mathrm{Res}(f,0) = \frac{2}{(e^0+1)^2} = \frac{1}{2}\,.$$

Per calcolare il residuo in $z=i$ trovo la parte singolare della serie di Laurent di f in questo punto. Cambio variabile ponendo $z = i + w$ e ottengo

$$f(z) = \frac{1-2i}{\pi^2 w^2} + \left(\frac{2}{\pi^2} - \frac{1}{\pi} + \frac{2i}{\pi}\right)\frac{1}{w^2} + \mathcal{O}(1)\,,$$

che implica

$$\mathrm{Res}(f, i) = \frac{2}{\pi^2} - \frac{1}{\pi} + \frac{2i}{\pi}\,.$$

Di conseguenza ottengo

$$I = 2\pi i \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} - \frac{1}{\pi} + \frac{2i}{\pi}\right) = -4 + i\left(\frac{4}{\pi} - 2 + \pi\right)\,.$$

(8) (6 pt). Fare un esempio specifico e concreto (senza bisogno di dimostrazione) dei seguenti oggetti (se l'oggetto non esiste rispondere "non esiste"):

(a) Una serie di potenze con raggio di convergenza uguale a 10.
(b) Una serie di potenze con raggio di convergenza uguale a 1 che converge sul disco chiuso $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.
(c) Una funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analitica su $\mathbb{C}$ e limitata (in modulo) sul semipiano superiore $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$.
(d) Una funzione analitica sull'anello $G = \mathrm{An}_{1,2}(0)$ che non ammette una primitiva su G.
(e) Una funzione analitica su $\mathbb{C}$ ad eccezione di poli di ordine 3 nei punti $ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
(f) Un polinomio armonico di terzo grado.

Soluzione. (a). $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{10^n}$.

(b). $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$.

(c). (Ho sbagliato a formulare la domanda. Dovevo aggiungere "non costante". Ovviamente a chi ha indicato una funzione costante ho dato il punto).
$e^{iz} = e^{-y+ix}$. Se $y \geq 0$, si ha $|e^{iz}| = e^{-y} \leq 1$.

(d). $1/z$.

(e). $1/\sinh^3(z)$.

(f). $u(x, y) = \operatorname{Re} z^3 = \operatorname{Re}(x + iy)^3 = x^3 - 3xy^2$.

(9) (7 pt). Enunciare e dimostrare il teorema sulla cosiddetta "Stima di Cauchy".