Modelli e Metodi Matematici della Fisica. E2

Filippo Cesi – 2017–18

Nome	
Cognome	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
test	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (8 pt[1]). Calcolare il seguente integrale, esprimendo il risultato in termini di quantità palesemente reali.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2 + 2\sqrt{3}x + 4} dx$$

Risp: $\frac{2^{4/3}\pi}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$

(2) (10 pt). Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato

$$(a)\;\; D^4\big((1+x)e^{-x^2}\delta_0''\big) \qquad\qquad (b)\;\; D^2\left[e^{|x|}D^2\big(x^2e^{-|x|}\big)\right].$$

(a)

Risp: $-2\delta_0^{(4)} - 2\delta_0^{(5)} + \delta_0^{(6)}$.

(b)

Soluzione. Si ha

$$\begin{aligned} D^2\big(x^2\, e^{-|x|}\big) &= D\left(e^{-|x|}(-\operatorname{sgn}(x)x^2 + 2x)\right) \\ &= e^{-|x|}\big[-\operatorname{sgn}(x)(-\operatorname{sgn}(x)x^2 + 2x) - 2x^2\delta_0 - 2|x| + 2\big] = e^{-|x|}(x^2 - 4|x| + 2)\,. \end{aligned}$$

Quindi

$$D^2\left[e^{|x|}D^2\big(x^2e^{-|x|}\big)\right] = D^2(x^2 - 4|x| + 2) = D(2x - 4\operatorname{sgn}(x)) = 2 - 8\delta_0\,.$$

(3) (7 pt). Consideriamo lo sviluppo in serie di Fourier in $[-\pi,\pi]$ della funzione $f(x) = H(x)\cos(x/3)$, in cui H è la funzione a gradino di Heaviside

$$H(x)\,\cos(x/3) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)] \qquad x \in [-\pi,\pi]\,.$$

Calcolare: (a) $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k$; (b) $\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}$; (c) $\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[|a_k|^2 + |b_k|^2\right]$.

Soluzione. (a) Sfruttando il teorema sulla convergenza puntuale della serie di Fourier in $x = 0$ ottengo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{1}{2}(f(0^+) + f(0^-)) = \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}\,.$$

(b) Sfruttando il teorema sulla convergenza puntuale della serie di Fourier in $x = \pi$ ottengo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(\kappa\pi) = \frac{1}{2}(f(\pi) + f(-\pi)) = \frac{1}{2}\,(\cos\pi/3) + 0) = \frac{1}{4}\,.$$

Sottraendo questa identità da quella ottenuta al punto (a) si ottiene

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}\,.$$

[1] 1 pt = 0.5 trentesimi

(c) Dall'uguaglianza di Parseval segue

$$\begin{aligned}
\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[|a_k|^2 + |b_k|^2\right] &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2(x/3) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos(2x/3)}{2} \, dx \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \frac{3}{2} \sin(2\pi/3) = \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{8\pi} \, .
\end{aligned}$$

(4) (10 pt). Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni, riconducendosi, se possibile, a casi noti

$$(a) \quad f(x) = x^2 e^{-|x| + i4x} \qquad\qquad (b) \quad f(x) = xH(x-4)e^{-3x}$$

(a)

Risp: $\frac{4-12(t-4)^2}{((t-4)^2+1)^3}$.

(b)

Risp: $\frac{e^{-4(3+it)}(13+4it)}{(3+it)^2}$.

(5) (7 pt). Calcolare il seguente integrale scritto nella notazione "dei fisici", in cui compare la "funzione composta della delta di Dirac", semplificando il più possibile il risultato.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\pi x/4} \, \delta(x^7 - x) \, dx \, .$$

Soluzione. La funzione $b(x) := x^7 - x$ si annulla nei punti

$$x^7 - x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0, \pm 1 \, .$$

Inoltre si ha

$$b'(x) = 7x^6 - 1 \qquad\qquad |b'(0)| = 1 \qquad\qquad |b'(\pm 1)| = 6$$

da cui si ottiene

$$\delta(x^7 - x) = \delta_0 + (\delta_1 + \delta_{-1})/6 \, .$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\pi/4} \, \delta(x^7 - x) \, dx &= \delta_0(e^{ix\pi/4}) + \frac{1}{6}\left[\delta_1(e^{ix\pi/4}) + \delta_{-1}(e^{ix\pi/4})\right] \\
&= 1 + \frac{1}{6}\left(e^{i\pi/4} + e^{-i\pi/4}\right) = 1 + \frac{1}{3}\cos(\pi/4) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{6} \, .
\end{aligned}$$

(6) (6 pt). Siano $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ due funzioni che soddisfano la relazione $f''(x) = xg(x/2)$ e siano $\hat{f}$ e $\hat{g}$ le trasformate di Fourier di f e g. Sapendo che

$$\hat{g}(\lambda) = e^{-\lambda^3} \qquad \text{per } \lambda \geq 3/2 \, ,$$

quanto vale $\hat{f}(1)$?

Nota: nel testo originale appariva, per errore, $\lambda \geq 3$ invece che $\lambda \geq 3/2$. Con quella condizione la risposta corretta sarebbe stata "non è possibile calcolare $\hat{f}(1)$". Ho dato per buone (parzialmente buone) risposte in cui non si teneva conto di alcuna restrizione su λ.

Soluzione. Applicando la trasformata di Fourier ad entrambi i membri della relazione $f''(x) = xg(x/2)$ si ottiene

$$(i\lambda)^2 \hat{f}(\lambda) = \mathcal{F}[xg(x/2)](\lambda) = iD\mathcal{F}[g(x/2)](\lambda) = 2i\frac{d}{d\lambda}\hat{g}(2\lambda) = 4i\hat{g}'(2\lambda)\,,$$

vale a dire

$$\hat{f}(\lambda) = -\frac{4i}{\lambda^2}\,\hat{g}'(2\lambda)\,.$$

Quindi

$$\hat{f}(1) = -4i\,\hat{g}'(2) = 12i\lambda^2 e^{-\lambda^3}\big|_{\lambda=2} = 48ie^{-8}\,.$$

(7) (6 pt). Sia $f \in C_c^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Dimostrare che $\mathcal{F}^a(\mathcal{F}f) = f$.