

## Argomenti

(1) Sia  $\text{Arg}$  l'argomento principale e  $\text{arg}_+ := \text{arg}_{[0,2\pi)}$ . Determinare  $\text{arg}$ ,  $\text{Arg}$  e  $\text{arg}_+$

$$(a) z = 3e^{i110\pi/7} \quad (b) z = -5e^{i100\pi} \quad (c) z = -2e^{i145\pi/11}$$

$$\text{Risp: } (a) \text{arg}(z) = \frac{110}{7}\pi + 2k\pi = \frac{12}{7}\pi + 2k\pi, \text{Arg}(z) = -\frac{2}{7}\pi, \text{arg}_+(z) = \frac{12}{7}\pi.$$

$$(b) \text{arg}(z) = 101\pi + 2k\pi = \pi + 2k\pi, \text{Arg}(z) = \pi, \text{arg}_+(z) = \pi.$$

$$(c) \text{arg}(z) = \frac{145}{11}\pi + \pi + 2k\pi = \frac{2}{11}\pi + 2k\pi, \text{Arg}(z) = \frac{2}{11}\pi, \text{arg}_+(z) = \frac{2}{11}\pi.$$

## Serie di potenze

(2) Calcolare il raggio di convergenza

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^n \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} (2+3i)^n z^n \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} n^4 \left[ \frac{1+i}{2+i} \right]^n z^n$$

$$\text{Risp: } (a) 1/3. (b) 1/\sqrt{13}. (c) \sqrt{5/2}.$$

(3) Calcolare il raggio di convergenza

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^\alpha} \text{ con } \alpha > 0 \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$$

$$(d) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} z^n \quad (e) \sum_{n=0}^{\infty} n! e^{-n^\alpha} z^n \text{ con } \alpha > 1$$

$$(f) \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!} \quad (g) \sum_{n=0}^{\infty} c^{n^2} z^n \text{ con } c \in \mathbb{C} \quad (h) \sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^2 z^n$$

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^{3n} z^{2n} \quad (j) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n^2} \quad (k) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{n^2}}{(n!)^3} z^n$$

$$(l) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n!} \quad (m) \sum_{n=0}^{\infty} 3^{n!} z^{n!} \quad (n) \sum_{n=0}^{\infty} e^{(\log n)^4} z^n \quad (o) \sum_{n=0}^{\infty} 3^{(n+1)!} z^{n!}$$

$$(p) \sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^{\sqrt{n}} z^n \quad (q) \sum_{n=1}^{\infty} (i^n - 2)^n z^n \quad (r) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n$$

$$(s) \sum_{n=0}^{\infty} \exp(in^2) z^n \quad (t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^{5n} \quad (u) \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^4 e^{-n^2} z^n$$

$$\text{Risp: } (a) \infty. (b) 1/e. (c) 1/4. (d) 1. (e) \infty. (f) 1. (j) 1. (k) 0. (l) 1. (m) 1/3. (n) 1. (o) 0. (p) 1. (q) 1/3. (s) 1. (u) \infty.$$

(4) Calcolare il raggio di convergenza della serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , in cui

$$a_n := \begin{cases} 3^n & \text{se } n \text{ è pari} \\ 4^n & \text{se } n \text{ è dispari, } n > 1000 \\ 5^n & \text{se } n \text{ è dispari, } n \leq 1000 \end{cases}$$

(5) Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} n^{\sqrt{n}} z^n \quad (b) \sum_{p \in \mathbb{N}: p \text{ primo}} z^p$$

$$\text{Risp: } (a) 1. (b) 1.$$

(6) Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sin \left( \frac{n\pi}{3} \right) \right)^{n/2} z^n$$

*Risp:*  $\sqrt{2}/\sqrt[4]{3}$ .

☆ (7) Determinare i valori di  $z$  per i quali le seguenti serie sono convergenti

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z}{1+z} \right)^n \qquad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1+z^{2n}}$$

(Sugg. per (b): Si considerino separatamente i 3 casi:  $|z| < 1$ ,  $|z| > 1$ ,  $|z| = 1$ ).

★ (8) Dimostrare che se  $0 < \delta < 1$  e  $(a_n)$  è una successione decrescente di numeri reali positivi tali che  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  allora la serie di potenze  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  converge uniformemente in

$$F := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, |z-1| \geq \delta\}.$$

Suggerimento: sia  $f_n(z) := \sum_{k=0}^n a_k z^k$  e sia  $w_n := \sum_{k=0}^n z_k$ . Usando la formula della “sommatoria per parti” si può scrivere

$$f_n(z) = a_n w_n + \sum_{k=1}^n (a_{k-1} - a_k) w_{k-1}.$$

Poiché  $a_n \rightarrow 0$  posso trovare  $N$  tale che per ogni  $n \geq N$  si ha  $0 < a_n < \varepsilon$ . A questo punto si può dimostrare che  $f_n$  è uniformemente di Cauchy e quindi uniformemente convergente in  $F$ . Più precisamente si può far vedere che, se  $n, m \geq N$  si ha  $|f_n(z) - f_m(z)| < 4\varepsilon/\delta$  per ogni  $z \in F$ .

## Mappe

(9) Dato  $A \subset \mathbb{C}$  e  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , determinare l'insieme  $f(A)$ . Disegnare nel piano complesso gli insiemi  $A$  e  $f(A)$

(a)  $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, \pi \leq \arg z \leq 5\pi/4\}$ ,  $f(z) = z^2$ .

(b)  $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2, \pi/2 \leq \arg z \leq 3\pi/4\}$ ,  $f(z) = z^9$ .

(c)  $A$  è il cerchio di centro  $2i$  e raggio 1.  $f(z) = iz + 1$ .

☆ (d)  $A$  è la retta  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 2\}$ .  $f(z) = 1/z$ .

*Risp:* (d) Sia  $C$  la circonferenza di centro  $1/4$  e raggio  $1/4$ . Allora  $f(A) = C \setminus \{0\}$ . Sugg: si parametrizzi  $A$  come  $z = 2 + it$  in cui  $t \in \mathbb{R}$ . Si scriva  $w = 1/z(t) = u + iv$  e si calcoli  $u^2 + v^2$ .