

Sviluppi in serie

(1) Determinare l'ordine di grandezza $\mathcal{O}((z - z_0)^n)$ nel limite $z \rightarrow z_0$

- (a) $z_0 = 0$, $\cos[\log[1 + (\sin z)^2]] - 1$ (b) $z_0 = 0$, $\exp(\sin^2 z - z^2) - 1$
 (c) $z_0 = \pi/2$, $\cos \log \sin z - 1$ (d) $z_0 = 0$, $\exp[\sin(z^2) - z^2] - 1$
 (e) $z_0 = 0$, $\tan[\log(1 + z) - z]$ (f) $z_0 = 4\pi i$, $\cos[\sin(e^z - 1)] - 1$

Risp: (a) $\mathcal{O}(z^4)$. (b) $\mathcal{O}(z^4)$. (c) $\mathcal{O}((z - \pi/2)^4)$. (d) $\mathcal{O}(z^6)$

(2) Calcolare lo sviluppo di Taylor (nell'origine) fino all'ordine z^3

- (a) $\frac{2 \cos z}{2 + \sin z}$ (b) $\frac{3 + z^2}{z + e^z}$ (c) $\frac{\sin z}{e^z - 1}$ (d) $\frac{z^2 \cos z}{z^2 + \log(z + 1)}$

Risp: (a) $1 - z/2 - z^2/4 + 5z^3/24 + \mathcal{O}(z^4)$. (b) $3 - 6z + 23z^2/2 - 41z^3/2 + \mathcal{O}(z^4)$. (c) $1 - \frac{z}{2} - \frac{z^2}{12} + \frac{z^3}{12} + \mathcal{O}(z^4)$.
 (d) $z - \frac{z^2}{2} - \frac{7z^3}{12} + \mathcal{O}(z^4)$.

(3) Scrivere le seguenti funzioni come serie di potenze centrate in 0

- (a) $\frac{z(z+a)}{(a-z)^3}$ (b) $\frac{1}{(1+z^2)^2}$ (c) $\frac{1}{(1-z^6)^3}$ (d) $\frac{z}{(z^2+1)(z^2-4)}$
 (e) $\frac{1}{(z^2-1)^2(z^2+4)}$ (f) $\frac{1}{1+z+z^2}$

Risp:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{a^{n+1}} z^n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^{2n}$ (c) $\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) z^{6n}$
 (d) $-\frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n + \frac{1}{4^{n+1}} \right] z^{2n+1}$ (e) $\frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{5} + \frac{(-1)^n}{5 \cdot 4^{n+1}} + (n+1) \right] z^{2n}$
 (f) $\sum_{n=0}^{\infty} (z^{3n} - z^{3n+1})$

☆ (4) (Bernoulli numbers, convenzione $B_1 = -1/2$). Siano date le funzioni

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z} \qquad g(z) = \frac{z}{e^z - 1}.$$

- (a) Scrivere lo sviluppo in serie di potenze di f con centro in 0, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ e determinare il raggio di convergenza R_f della serie ottenuta.
 (b) Sia $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ lo sviluppo in serie di g nell'origine. Determinare il raggio di convergenza R_g di questa serie.
 (c) I numeri di Bernoulli B_n sono definiti come $B_n := n! b_n$, in modo tale da poter scrivere

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \qquad |z| < R_g.$$

Dimostrare che $B_0 = 1$ e che, per ogni $n \geq 1$, vale

$$B_0 + \binom{n+1}{1} B_1 + \dots + \binom{n+1}{n} B_n = 0.$$

Dopo aver calcolato B_0 , si usi la formula precedente per calcolare $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8$. Controllare il risultato su www.wikipedia.org alla voce ...

Integrali

(5) Scrivere esplicitamente in termini di una parametrizzazione di γ l'integrale $\int_{\gamma} f(z) dz$, nel caso in cui γ è dato da

- (a) il triangolo $[0, 1, i, 0]$ percorso in senso antiorario
- (b) la circonferenza di centro i e raggio R percorsa 2 volte in senso orario
- (c) il quadrato di centro in 0 e lato uguale a 2, percorso in senso antiorario

Risp: (a) $\int_0^1 f(t) dt + (i-1) \int_0^1 f((1-t) + it) dt - i \int_0^1 f(it) dt.$

(6) Se γ è la spezzata $[0, 1, 2+i, 5+i, 7+3i, \log i, i^i, 2+i, e^{e^{2-i}}, i]$. Calcolare (senza fare troppi calcoli)

$$\int_{\gamma} \cos z dz.$$

(7) Calcolare, usando la definizione,

(a) $\int_{|z|=1} \bar{z} dz$ (b) $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$ $\gamma = [1-i, 1+i, -1+i, -1-i, 1-i].$

Risp: (b) $2\pi i.$

(8) Dimostrare che, se γ è il quadrato $[1, i, -1, -i, 1]$

$$\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{z^4} \right| \leq 16\sqrt{2}$$

Varie

11-12/E1 (9) Data la funzione $f(z) = \log(1 + iz^2)$ (ramo principale):

- (a) determinare il dominio di analiticità di f e disegnarlo sul piano complesso
- (b) calcolare $a_+ := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(1+i+\varepsilon)$ e $a_- := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(1+i-\varepsilon).$

(10) Trovare l'armonica coniugata alla funzione

$$u(x, y) = e^{x^2-y^2} \cos(2xy).$$

(Sugg: provate ad indovinare quale può essere una funzione analitica f tale che $u = \operatorname{Re} f$)