Domini, sviluppi, CR, integrali, Bernoulli, Zeri

(DA) (1) Data la funzione $f(z) = \sqrt{2 + z^3}$ (ramo principale):

(a) determinare il dominio di analiticità di f
(b) calcolare $a_+ := \lim_{\varepsilon\to 0^+} f\big(2e^{i(\pi/3+\varepsilon)}\big)$ e $a_- := \lim_{\varepsilon\to 0^+} f\big(2e^{i(\pi/3-\varepsilon)}\big)$.

Risp: (a) $D = \mathbb{C}\backslash X$ in cui $X := \big\{\rho e^{i\vartheta} : \rho \geq \sqrt[3]{2},\ \vartheta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3},\ k = 0,1,2\big\}$. (b) $a_\pm = \mp i\sqrt{6}$.

☆ (2) Determinare e disegnare sul piano complesso il dominio di analiticità G della funzione

$$f(z) := \frac{1}{2i}\,\log\frac{1+iz}{1-iz}\,.$$

Dimostrare che f è un ramo dell'arcotangente, vale a dire che $\tan f(z) = z$ per ogni $z \in G$. (Sugg: $G = \mathbb{C}\backslash A$ in cui $A := \{z \in \mathbb{C} : (1+iz)/(1-iz) = -t,\ t \geq 0\}$. Risolvendo per z si trova $A = \{is : s \in \mathbb{R},\ |s| \geq 1\}$. Ponendo poi $w = (1+iz)/(1-iz)$ non è difficile far vedere che $\tan f(z) = -i\frac{w^{1/2}-w^{-1/2}}{w^{1/2}+w^{-1/2}} = z$).

10-11/E1 (3) Sia X l'insieme delle soluzioni dell'equazione $z^i = 1 + i\sqrt{3}$ (usare il ramo principale per definire la potenza).

(a) Determinare X.
(b) Determinare i punti di accumulazione di X in $\mathbb{C}$ (se esistono).
(c) Quante di queste soluzioni appartengono all'anello $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 100\}$?

Risp: (a) $X = \{z_k : k \in \mathbb{Z}\}$ in cui $z_k := \exp\big[\pi/3 + 2k\pi - i\log 2\big]$. (c) 1.

10-11/S1 (4) Sia $z = 1 + i\sqrt{3}$. Calcolare (usare il ramo principale del log)

(a) $\operatorname{Im}(z^8)$ $\qquad$ (b) $\log(z^8)$ $\qquad$ (c) $|i^z|$

Risp: (a) $2^7\sqrt{3}$. (b) $8\log 2 + i2\pi/3$. (c) $e^{-\sqrt{3}\pi/2}$.

(5) Trovare l'armonica coniugata alla funzione

$$u(x,y) := e^{-y}\big(x\cos x - y\sin x\big) \qquad x, y \in \mathbb{R}\,.$$

(6) Determinare l'ordine di grandezza $\mathcal{O}((z-z_0)^n)$ nel limite $z \to z_0$

(a) $z_0 = 0,\ \tan\tan\tan z$ $\qquad$ (b) $z_0 = \pi/2,\ \cos\cos\cos z$
(c) $z_0 = 0,\ \cos[\log(1+z) - \sin z] - 1$ $\qquad$ (d) $z_0 = 0,\ \exp\sin z - 1$
(e) $z_0 = 0,\ \cos[\log(1+z) + \sin z] - 1$ $\qquad$ (f) $z_0 = 0,\ \log\cos(z^2)$

Risp: (a) $\mathcal{O}(z)$. (b) $\mathcal{O}(1)$. (c) $\mathcal{O}(z^4)$. (d) $\mathcal{O}(z)$. (e) $\mathcal{O}(z^2)$. (f) $\mathcal{O}(z^4)$.

(7) Verificare il seguente sviluppo di Taylor nell'origine fino all'ordine z^3

$$\frac{z\,e^z}{\cosh z} = z + z^2 + \underline{\mathcal{O}}(z^4)\,.$$

(8) Calcolare lo sviluppo di Taylor nell'origine fino all'ordine z^4

(a) $\dfrac{z + \sin^2 z}{\cos z}$ $\qquad$ (b) $\dfrac{\sin(z^2)\,e^z}{2 + \sin z}$

Risp: (a) $z + z^2 + z^3/2 + z^4/6 + \underline{\mathcal{O}}(z^5)$. (b) $z^2/2 + z^3/4 + z^4/8 + \underline{\mathcal{O}}(z^5)$.

Volta la pagina ☞

(9) Sia G una regione in $\mathbb{C}$ e sia $f : G \mapsto \mathbb{C}$ analitica. Dimostrare che se $|f|$ è costante allora f è costante. (Sugg: porre $f = u + iv$ ed usare ...).

(10) Sia $R_0 > 0$ e f una funzione continua su $G := \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R_0\}$. Se C_R è un arco di circonferenza (o anche un'intera circonferenza) di raggio $R > R_0$ definisco

$$I(R) := \int_{C_R} f\,.$$

Dimostrare che se $\lim_{|z|\to\infty}(z\, f(z)) = 0$, allora $\lim_{R\to\infty} I(R) = 0$.

(11) Sia

$$I(R) := \int_\gamma \frac{z^4 - 20z^2}{3z^6 + 1}\, dz \qquad \gamma(t) = Re^{it} \;\; t \in [0, 2\pi]$$

Dimostrare che $\lim_{R\to\infty} I(R) = 0$

(12) Sia p un polinomio di grado n le cui radici si trovano tutte in $B_R(0)$ con $R > 0$. Dimostrare che

$$\int_{|z|=R} \frac{p'(z)}{p(z)}\, dz = 2\pi i n\,.$$

10-11/S2 (13) Sia f una funzione analitica sul primo quadrante $G = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z > 0\}$. Sapendo che $|f(z)| \leq \operatorname{Re} z$ per ogni $z \in G$, come posso maggiorare la quantità $|f''(z_0)|$ in cui $z_0 = 15 + 10i$?

(14) Sia f una funzione analitica sulla semistriscia $G = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Re} z < 22,\ \operatorname{Im} z > 0\}$. Sapendo che $|f(z)| \leq \operatorname{Im} z$ per ogni $z \in G$, come posso maggiorare la quantità $|f''(z_0)|$ in cui $z_0 = 15 + 10i$?

(15) Calcolare il raggio di convergenza delle serie di Taylor centrata in 0 (sugg: non è necessario calcolare lo sviluppo in serie)

$$(a)\quad \frac{\cosh\left(e^{z^5}\right)}{1 + z + z^2} \qquad (b)\quad \tanh z \qquad (c)\quad \frac{e^{z^2}}{1 + \sin(2z^3)}$$

Risp: (a) 1. (b) $\pi/2$. (c) $\sqrt[3]{\pi/4}$.

12-13/E1 (16) Si considerino gli sviluppi in serie di Taylor della funzione $f(z) = \tan(z^2)$ con centro rispettivamente in 0 e i.

$$(a)\quad \tan(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n \qquad\qquad (b)\quad \tan(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, (z - i)^n\,.$$

Determinare i raggi di convergenza R_a ed R_b delle serie (a) e (b).
Risp: $R_a = \sqrt{\pi/2}$, $R_b = \sqrt{\pi/2} - 1$.

(17) Trovare gli zeri con relative molteplicità delle seguenti funzioni

$(a)\quad z^3(z+3)^5(z^2+1)^4$	$(b)\quad z^7 + 3$	$(c)\quad (z^7+3)^3$
$(d)\quad e^{2z} + i$	$(e)\quad 2\sin(z/2) - 1$	$(f)\quad \sin(z/2) - 1$
$(g)\quad (\sin(z/2) - 1)^3$	$(h)\quad \sin^2(z) - 1$	$(i)\quad \cosh z$
$(j)\quad \sin(z^2)$	$(k)\quad e^{\pi z^2} - 1$	

Risp: (a) 0 molt. 3. -3 molt. 5. $\pm i$ molt. 4. (b) $\sqrt[7]{3}\exp[i(\pi/7 + 2k\pi/7)]$, $k \in \{0, 1, \ldots, 6\}$, molt. 1. (g) $\pi(1 + 4k)$, $k \in \mathbb{Z}$, molt. 6. (h) $\pi(1/2 + k)$, $k \in \mathbb{Z}$, molt. 2. (j) 0 molt. 2. $\pm\sqrt{k\pi}$, $k \in \mathbb{N}^*$, molt. 1. $\pm i\sqrt{k\pi}$, $k \in \mathbb{N}^*$, molt. 1.