Tecniche di integrazione

(1) Verificare che, se $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\lambda x}}{(x^2+1)^2}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-|\lambda|}(|\lambda|+1)$$

(2) Calcolare

$$(a) \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2-2x+4\right)^2} \qquad\qquad (b) \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\left(x^2-2x+2\right)}$$

Risp: (a) $\frac{1}{24} + \frac{\pi}{9\sqrt{3}}$. (b) $\frac{1}{10}(3\pi + \log 2)$.

(3) Calcolare

$$(a) \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^a(x+1)} \ (0<a<1) \qquad (b) \quad \int_0^{\infty} \frac{x^{2/3}}{x^2+2x+2}\, dx \qquad (c) \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\left(x^2+5x+6\right)}\, dx$$

Risp: (a) $\frac{\pi}{\sin(a\pi)}$. (b) $\pi\sqrt[3]{2}/\sqrt{3}$. (c) $\pi(1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{3})$.

(4) Dimostrare che, se $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in (-1, n-1)\backslash\mathbb{N}$ e $a > 0$, si ha

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}\, dx}{(x+a)^n} = \binom{\alpha}{n-1} \frac{(-1)^n \pi a^{\alpha-n+1}}{\sin(\alpha\pi)}\,.$$

Il coefficiente binomiale $\binom{\alpha}{k}$, quando α non è intero, è definito come

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

(5) Dimostrare che

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2+2x+2}\, dx = \frac{\pi}{8}\log 2\,.$$

(6) Dimostrare che

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(x^2+1)^2}\, dx = -\frac{\pi}{4}\,.$$

[Sugg: integrare la funzione $f(z) = \log_+ z/(z^2+1)^2$, lungo il cammino chiuso

$$\gamma = [-R, -\rho] \cdot (C_\rho^+)^{-1} \cdot [\rho, R] \cdot C_R^+\,,$$

in cui C_b^+ è la semicirconferenza di raggio b e centro 0 che appartiene al semipiano superiore, percorsa in senso antiorario, vale a dire $C_b^+(t) := be^{it}$ con $t \in [0, \pi]$].

☆ (7) Dimostrare che

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}(x^2+1)}\, dx = -\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}\,.$$

[Sugg: usare il cammino suggerito al problema precedente].

[TI] (8) Calcolare

$$(a) \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x\, dx}{x^2-2x+5} \qquad\qquad (b) \quad \int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}\, dx}{x^2-2x+4}$$

Risp: (a) $\frac{\pi}{2e^2}\sin(1)$. (b) $\frac{2\sqrt[3]{2}\pi}{3}\sin(2\pi/9)$.

Volta la pagina ☞

13-14/E2 (9) Calcolare

$$\int_0^\infty \frac{x^{2/3}\,dx}{x^2+4x+8}\,.$$

Risp: $\pi/\sqrt{3}$.

11-12/S1 (10) Calcolare il seguente integrale esprimendo il risultato in termini di quantità palesemente reali.

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{x^2+6x+18}$$

Risp: $\frac{\pi\sqrt[4]{2}}{\sqrt{3}}\sin(\pi/8)$.

(11) Calcolare il seguente integrale. Il risultato è un numero reale e deve essere espresso in termini di quantità palesemente reali.

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{x^2-2x+5}$$

Risp: $\frac{\pi 5^{1/4}}{2}\sin\big((\pi-\arctan 2)/2\big)$.

(12) Calcolare

$$(a)\quad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+a\cos x}\quad a\in(-1,1) \qquad\qquad (b)\quad \int_0^{\pi} \frac{dx}{(a+\cos x)^2}\quad (a>1)$$

Risp: (a) $\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$. (b) $\frac{a\pi}{(a^2-1)^{3/2}}$.

(13) Dimostrare che se $n\in\mathbb{N}^*$ si ha

$$\int_0^{\pi} (\sin x)^{2n}\,dx = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,.$$

☆ (14) Dimostrare che

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,dx = \infty \qquad\qquad \lim_{K\to+\infty}\int_{-K}^{K} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi\,.$$