

## Distribuzioni/1

- (1) Sia  $g \in C^1(\mathbb{R})$ . Dimostrare che la derivata nel senso delle distribuzioni di  $g(|x|)$  è data da  $g'(|x|) \operatorname{sgn}(x)$ .  
 (2) Sia  $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Dimostrare (per induzione) che

$$h(x)\delta_0^{(n)} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} h^{(k)}(0) \delta_0^{(n-k)}$$

- (3) Dimostrare che: (1)  $x^n \delta_0^{(n)} = (-1)^n n! \delta_0$ ; (2) Se  $p > n$  allora  $x^p \delta_0^{(n)} = 0$ .  
 (4) Dato un intero positivo  $n$ , esprimere la distribuzione  $x^{n-1} \delta_0^{(n)}$  come combinazione lineare (a coefficienti costanti) di  $\delta_0$  e/o delle sue derivate.

*Risp:*  $(-1)^{n-1} n! \delta_0'$ .

- (5) Calcolare le seguenti distribuzioni ( $[x]$  è la parte intera di  $x$ , cioè il più grande numero intero minore od uguale ad  $x$ ).

(a)  $e^{3x} \delta_0''$       (b)  $\sin x |x|'''$       (c)  $D[xP(1/x)]$       (d)  $D[x[x]]$

*Risp:* (a)  $\delta_0'' - 6\delta_0' + 9\delta_0$ . (b)  $-2\delta_0$ . (c) 0. (d)  $[x] + \sum_{k \in \mathbb{Z}} k \delta_k$ .

- (6) Calcolare le seguenti distribuzioni ( $[x]$  è la parte intera di  $x$ , cioè il più grande numero intero minore od uguale ad  $x$ ).

(a)  $D[\operatorname{sgn} x \cos x]$       (b)  $x \cos x \delta_0''$       (c)  $x^{10} \delta_0^{(4)}$       (d)  $D[\sin(\pi x) [x]]$

*Risp:* (a)  $2\delta_0 - \sin|x|$ . (b)  $-2\delta_0'$ . (c) 0. (d)  $\pi \cos(\pi x) [x]$ .

- (7) Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato ( $[x]$  è la parte intera di  $x$ , cioè il più grande numero intero minore od uguale ad  $x$ )

(a)  $D[x^2 (\log|x|)']$       (b)  $D[x^3 (\log|x|)']$       (c)  $D[\cos x \operatorname{sgn}(x)]$   
 (d)  $e^{\sin x} \delta_0'$       (e)  $D(e^{2x} |x|''')$       (f)  $D^2(e^{|x|})$   
 (g)  $D^5(e^{\cos x+3} \delta_0)$       (h)  $D^3[\cos(x^2) \delta_0']$       (i)  $x D(\log|x|)$   
 (j)  $x^4 \delta_0^{(4)}$       (k)  $e^{-x^2} |x|''''$       (l)  $e^{2x} D^5(|x|)$   
 (m)  $D[\operatorname{sgn}(x-1) \operatorname{sgn}(x+4)]$       (n)  $D[\sin x \delta_0']$       (o)  $D^4[e^{x^2} \delta_0'']$   
 (p)  $D^4[e^{x^2} D^4(|x|)]$       (q)  $D[e^x]$       (r)  $D^3(x e^{-|x|})$   
 (s)  $D^4[\sin|x|]$

*Risp:* (a) 1. (b)  $2x$ . (c)  $2\delta_0 - \sin|x|$ . (d)  $\delta_0' - \delta_0$ . (e)  $2\delta_0'' - 4\delta_0'$ . (f)  $e^{|x|} + 2\delta_0$ . (g)  $e^4 \delta_0^{(5)}$ . (h)  $\delta_0^{(4)}$ . (i) 1. (l)  $2\delta_0''' - 12\delta_0'' + 24\delta_0' - 16\delta_0$ . (m)  $-2\delta_{-4} + 2\delta_1$ . (r)  $e^{-|x|}(3 - |x|) - 4\delta_0$ . (s)  $\sin|x| - 2\delta_0 + 2\delta_0''$ .

- [DI] (8) Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato ( $[x]$  è la parte intera di  $x$ , cioè il più grande numero intero minore od uguale ad  $x$ ).

(a)  $D[\cos(x^2) \operatorname{sgn}(x)]$       (b)  $D^2(e^{|x+1|})$       (c)  $D[e^x]$   
 (d)  $D^4[x^5 \delta_0^{(5)}]$       (e)  $D^4[e^{x^2} \delta_0'']$

- [DI] (9) Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato

(a)  $D^3(xe^x \delta_0'')$       (b)  $D^8(x^4 \delta_0^{(5)})$       (c)  $D^2(|\sin x|)$

*Risp:* (a)  $2(\delta_0^{(3)} - \delta_0^{(4)})$ . (b)  $120 \delta_0^{(9)}$ . (c)  $-|\sin x| + 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{k\pi}$ .

- (10) Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato ( $[x]$  è la parte intera di  $x$ , cioè il più grande numero intero minore od uguale ad  $x$ ).

(a)  $D^2[\sin(|x|)]$       (b)  $D^3[x e^{2x} \delta_0'']$       (c)  $D[e^{-x^2} [x]]$

*Risp:* (a)  $-\sin(|x|) + 2\delta_0$ . (b)  $4\delta_0^{(3)} - 2\delta_0^{(4)}$ . (c)  $-2xe^{-x^2} [x] + \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-k^2} \delta_k$ .

11-12/S1 (11) Data la distribuzione  $\varphi = \operatorname{sgn}(x) e^{-x^2}$ , calcolare  $D^6 [\varphi' + 2x\varphi]$ .

*Risp:*  $2\delta_0^{(6)}$ .

12-13/S1 (12) Calcolare, nel senso delle distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato

$$D^3(|1 - x^2|)$$

*Risp:*  $-4 [(\delta_{-1} - \delta_1) - (\delta'_{-1} + \delta'_1)]$ .

12-13/S2 (13) Calcolare, nel senso delle distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato

$$D \left[ e^{|x|} D^2(xe^{-|x|}) \right]$$

*Risp:*  $1 - 4\delta_0$ .

13-14/S1 (14) Sia  $F(x) = H(x) \sin(\omega x)$ , in cui  $H$  è la funzione a gradino di Heaviside e  $\omega > 0$ . Calcolare, nel senso delle distribuzioni,  $F'' + \omega^2 F$ .

*Risp:*  $\omega\delta_0$ .

13-14/S2 (15) Sia  $F(x) = \sin(|x|)$ , Calcolare, nel senso delle distribuzioni,  $F'' + F$ .

*Risp:*  $2\delta_0$ .

(16) Dato  $n \in \mathbb{N}$ , scrivere  $(1+x)^n \delta_0^{(3)}$  come combinazione lineare (con coefficienti costanti) di delta di Dirac e delle sue derivate.

(17) Siano  $m, n$  due interi non negativi. Dimostrare che

$$x^m \delta_0^{(n)} = \begin{cases} (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!} \delta_0^{(n-m)} & \text{se } n \geq m \\ 0 & \text{se } n < m \end{cases}$$