Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S1

Filippo Cesi – 2017–18

Nome	
Cognome	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
totale	
test	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risultato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (6 pt).[1] Calcolare il raggio di convergenza delle serie di potenze

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n \qquad\qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (4+3i)^n z^n .$$

Risp: (a) 1/4. (b) 1/5.

(2) (8 pt). Calcolare

$$(a) \quad \int_{|z-1|=2} \frac{1+z+z^2}{z\,\sin(\pi z/2)}\,dz \qquad\qquad (b) \quad \int_{|z|=5} \frac{z^3\left(z^2-z+1\right)}{(z-3)\left(z^4+2\right)}\,dz$$

Schema di soluzione. (a) All'interno del cammino di integrazione ci sono 2 poli in $z=0$ (ordine 2) e $z=2$ (ordine 1). Sviluppando l'integrando $f(z)$ in serie di Laurent, limitandosi alla parte singolare, si ottiene

$$z_0 = 0 \qquad\qquad f(z) = \frac{2}{\pi z^2} + \frac{2}{\pi z} + \underline{\mathcal{O}}(1)$$

$$z_0 = 2 \qquad\qquad f(z) = -\frac{7}{\pi(z-2)} + \underline{\mathcal{O}}(1)$$

Quindi

$$\int_{|z-1|=2} f(z)\,dz = 2\pi i\,[\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,2)] = 2\pi i \left(\frac{2}{\pi} - \frac{7}{\pi}\right) = -10i\,.$$

(b) Tutte le singolarità dell'integrando $f(z)$ si trovano all'interno del cammino di integrazione. Usando il metodo del residuo all'infinito, ottengo

$$\int_{|z|=5} f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)\,.$$

Sviluppando in serie di Laurent si ha

$$\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{z^2-z+1}{-6z^7+2z^6-3z^3+z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} + \mathcal{O}(1)\,.$$

Quindi

$$\int_{|z|=5} f(z)\,dz = 4\pi i\,.$$

(3) (6 pt). Calcolare il seguente integrale esprimendo il risultato in termini di quantità palesemente reali.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\,dx}{x^2+4x+16}\,.$$

Soluzione. Sia γ il cammino chiuso a forma di "pacman" con la bocca coincidente con il semiasse reale positivo e sia

$$f(z) := \frac{[\sqrt{z}]^+}{z^2+4z+16}$$

[1] 1 pt = 0.5 voto

in cui $[\ ]^+$ indica che sto scegliendo il ramo $+$ della radice, vale a dire quello con il taglio lungo il semiasse reale positivo. Allora si ottiene

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{x^2+4x+16} = \frac{1}{1-e^{i\pi}} \int_\gamma f(z)\,dz = \pi i \sum_k \mathrm{Res}(f, z_k)\,,$$

in cui z_k sono le singolarità isolate di f. In questo caso ci sono due singolarità isolate

$$z_\pm = -2 \pm 2\sqrt{3} \qquad\qquad z_+ = 4e^{i2\pi/3} \qquad\qquad z_- = 4e^{i4\pi/3}$$

e sono entrambi poli semplici. Quindi

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(f, z_+) &= \frac{[\sqrt{z_+}]^+}{4\sqrt{3}i} = \frac{2e^{i\pi/3}}{4\sqrt{3}i} \\ \mathrm{Res}(f, z_-) &= -\frac{[\sqrt{z_-}]^+}{4\sqrt{3}i} = -\frac{2e^{i2\pi/3}}{4\sqrt{3}i} \end{aligned}$$

In questo modo si ha

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{x^2+4x+16} = 2\pi i\, \frac{e^{i\pi/3} - e^{i2\pi/3}}{4\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\,.$$

(4) (8 pt). Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni, riconducendosi, se possibile, a casi noti

$$(a) \quad f(x) = \frac{1}{(2x+5i)^2} \qquad\qquad (b) \quad f(x) = \frac{x^2 e^{ix}}{(1+4x^2)^2}\,.$$

Soluzione. (a) Partendo da una coppia nota f, $\hat{f}$ ed usando le regole di calcolo delle trasformate di Fourier, ottengo

$$\begin{array}{llcl}
 & H(x)\,e^{-x} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{1}{1+i\lambda} \\
{[\mathcal{F} = (2\pi)(\mathcal{F}^{-1} \circ P)]} & \dfrac{1}{1+ix} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & 2\pi H(-\lambda)\,e^{\lambda} \\
{[x \to (-x)]} & \dfrac{1}{1-ix} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & 2\pi H(\lambda)\,e^{-\lambda} \\
{[f \to (-i)f]} & \dfrac{1}{x+i} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & -\,2i\pi H(\lambda)\,e^{-\lambda} \\
{[f \to -f']} & \dfrac{1}{(x+i)^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & -\,2\pi\lambda H(\lambda)\,e^{-\lambda} \\
{[x \to 2x/5]} & \dfrac{1}{(2x/5+i)^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & -\,\dfrac{2\pi 5^2}{2^2} H(\lambda)\,\lambda\,e^{-5\lambda/2} \\
{[f \to f/25]} & \dfrac{1}{(2x+i5)^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & -\,\dfrac{\pi}{2} H(\lambda)\,\lambda\,e^{-5\lambda/2}
\end{array}$$

(b) Partendo da una coppia nota f, $\hat{f}$ ed usando le regole di calcolo delle trasformate di Fourier, ottengo

$$
\begin{array}{llcl}
 & \dfrac{1}{1+x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \pi e^{-|\lambda|} \\
[x \to 2x] & \dfrac{1}{1+4x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{\pi}{2} e^{-|\lambda/2|} = \dfrac{\pi}{2} e^{-|\lambda|/2} \\
[f(x) \to f'(x)] & -\dfrac{8x}{(1+4x^2)^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{i\pi\lambda}{2} e^{-|\lambda|/2} \\
[f(x) \to -\dfrac{x}{8} f(x)] & \dfrac{x^2}{(1+4x^2)^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & -\dfrac{1}{8} iD\Big(\dfrac{i\pi\lambda}{2} e^{-|\lambda|/2}\Big) \\
 & \dfrac{x^2}{(1+4x^2)^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{\pi}{16} e^{-|\lambda|/2}\Big(1-\dfrac{|\lambda|}{2}\Big) \\
[f- > fe^{ix}] & \dfrac{x^2 e^{ix}}{(1+a^2x^2)^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{\pi}{16} e^{-|\lambda-1|/2}\Big(1-\dfrac{|\lambda-1|}{2}\Big) .
\end{array}
$$

Nel penultimo passaggio ho usato l'identità: $\lambda\,\mathrm{sgn}(\lambda) = |\lambda|$.

(5) (8 pt). Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato ($\lfloor x \rfloor$ è la parte intera di x, cioè il più grande numero intero minore od uguale ad x).

$$(a)\quad D^4\big(e^{-x^2}\, D^4(|x|)\big) \qquad\qquad (b)\quad D^3(|1-x^2|)\,.$$

Schema di soluzione.(a) Poichè

$$e^{-x^2}\, D^4(|x|) = 2e^{-x^2}\delta_0'' = 2\delta_0'' - 4\delta_0$$

si ha

$$D^4\big(e^{-x^2}\, D^4(|x|)\big) = 2\delta_0^{(6)} - 4\delta_0^{(4)}\,.$$

(b)

Risp: $-4\ \big[(\delta_{-1} - \delta_1) - (\delta_{-1}' + \delta_1')\big]$.

(6) (6 pt). Calcolare il seguente integrale scritto nella notazione "dei fisici", in cui compare la "funzione composta della delta di Dirac", semplificando il più possibile il risultato.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\pi x/6}\, \delta(x^5 - x)\, dx\,.$$

Soluzione. La funzione $b(x) := x^5 - x$ si annulla nei punti

$$x^5 - x = 0 \quad\iff\quad x = 0, \pm 1\,.$$

Inoltre si ha

$$b'(x) = 5x^4 - 1 \qquad\qquad |b'(0)| = 1 \qquad\qquad |b'(\pm 1)| = 4$$

da cui si ottiene

$$\delta(x^5 - x) = \delta_0 + (\delta_1 + \delta_{-1})/4\,.$$

Quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\pi/6}\, \delta(x^5 - x)\, dx = \delta_0(e^{ix\pi/6}) + \frac{1}{4}\big[\delta_1(e^{ix\pi/6}) + \delta_{-1}(e^{ix\pi/6})\big]$$

$$= 1 + \frac{1}{4}\big(e^{i\pi/6} + e^{-i\pi/6}\big) = 1 + \frac{1}{2}\cos(\pi/6) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\,.$$

(7) (6 pt). Enunciare e dimostrare il teorema Fondamentale dell'Algebra.

(8) (6 pt). Sia n un intero positivo. La funzione $f(z) = 1/(z^n + 1)^2$ ha n poli di ordine 2 nei punti

$$z_k = \exp\Big[\frac{i\pi}{n}(1+2k)\Big] \qquad\qquad k = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

Dimostrare che esiste una funzione $g(n)$ tale che il residuo di f in z_k può essere espresso come

$$\mathrm{Res}(f, z_k) = g(n)\, z_k\,.$$

Determinare $g(n)$.

Risp: $g(n) = -(n-1)/n^2$.