

Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S1

Filippo Cesi – 2017–18

Nome	
Cognome	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
test	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

- (1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.
- (2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.
- (3) Il risultato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.
- (4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (6 pt¹). Calcolare il raggio di convergenza

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} (5-i)^n z^n \qquad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n!}} z^n$$

Risp: (a) $1/\sqrt{26}$. (b) ∞ .

(2) (8 pt). Calcolare

$$(a) \int_{|z|=2} \frac{2z^4 + 3z^3 + 4}{z^4 + 3} dz \qquad (b) \int_{|z|=1} \frac{z dz}{1 - 2 \sin(\pi z)}.$$

Schema di soluzione. (a) Sia

$$f(z) := \frac{2z^4 + 3z^3 + 4}{z^4 + 3}.$$

Poichè tutte le singolarità si trovano all'interno del cammino di integrazione, ottengo

$$\int_{|z|=2} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = 6\pi i.$$

(b) Sia

$$f(z) := \frac{z}{1 - 2 \sin(\pi z)}.$$

Allora

$$\int_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i [\operatorname{Res}(f, 1/6) + \operatorname{Res}(f, 5/6)] = 2\pi i \left[-\frac{1}{6\sqrt{3}\pi} + \frac{5}{6\sqrt{3}\pi} \right] = \frac{4i}{3\sqrt{3}}.$$

(3) (7 pt) Calcolare

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 - 2x + 2)^2}.$$

Soluzione. Chiudendo il cammino di integrazione nel semipiano superiore, otteniamo

$$\begin{aligned} I &:= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 - 2x + 2)^2} dx \\ &= \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} dx}{(x^2 - 2x + 2)^2} dx \\ &= \operatorname{Re} \left[\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz} dz}{(z^2 - 2z + 2)^2} \right] \qquad \gamma_R = [-R, R] + Re^{it} \quad t \in [0, \pi] \\ &= \operatorname{Re} [2\pi i \operatorname{Res}(g(z), 1+i)], \end{aligned}$$

in cui

$$g(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2 - 2z + 2)^2}.$$

Poniamo

$$z_+ := 1 + i$$

$$z_- := 1 - i.$$

¹1 pt = 0.5 trentesimi

Trattandosi di un polo di ordine 2, posso scrivere

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Res}(g(z), z_+) &= \lim_{z \rightarrow z_+} D [(z - z_+)^2 g(z)] \\
 &= \lim_{z \rightarrow z_+} D \left[\frac{e^{iz}}{(z - z_-)^2} \right] \\
 &= \lim_{z \rightarrow z_+} \frac{ie^{iz}(z - z_-)^2 - 2e^{iz}(z - z_-)}{(z - z_-)^4} \\
 &= e^{iz_+} \frac{i(z_+ - z_-)^2 - 2(z_+ - z_-)}{(z_+ - z_-)^4} \\
 &= e^{iz_+} \frac{i(z_+ - z_-) - 2}{(z_+ - z_-)^3} \\
 &= -e^{-1+i} \frac{4}{(2i)^3} = e^{-1+i} \frac{1}{2i}
 \end{aligned}$$

Otteniamo dunque

$$I = \operatorname{Re} \left[2\pi i \left(e^{-1+i} \frac{1}{2i} \right) \right] = \operatorname{Re} [\pi e^{-1+i}] = \frac{\pi \cos(1)}{e}.$$

- (4) (6 pt). Calcolare, nel senso delle distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato

$$D^4 [e^{-(x-1)^2} \delta_0^{(2)}]$$

Risp: $e^{-1} (2\delta_0^{(4)} - 4\delta_0^{(5)} + \delta_0^{(6)})$.

- (5) (7 pt). Sia $F(x) = H(x) \sin(\omega x)$, in cui H è la funzione a gradino di Heaviside e $\omega > 0$. Calcolare, nel senso delle distribuzioni, $F'' + \omega^2 F$.

Soluzione. Si ha

$$F'(x) = \sin(\omega x)\delta_0 + \omega H(x) \cos(\omega x) = \omega H(x) \cos(\omega x),$$

quindi

$$F''(x) = \omega \cos(\omega x)\delta_0 - \omega^2 H(x) \sin(\omega x) = \omega \delta_0 - \omega^2 H(x) \sin(\omega x).$$

Otteniamo così

$$F''(x) + \omega^2 F(x) = \omega \delta_0.$$

- (6) (8 pt). Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni, riconducendosi, se possibile, a casi noti

(a) $f(x) = x^2 e^{-x^2}$

(b) $f(x) = x e^{-x} H(x - 2)$

Soluzione. (a) Si ha

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(\lambda) &= \mathcal{F}[x^2 e^{-x^2}](\lambda) = (iD)^2 \mathcal{F}[e^{-x^2}](\lambda) = -D^2 \left(\sqrt{\pi} e^{-\lambda^2/4} \right) \\
 &= -\frac{\sqrt{\pi}}{4} e^{-\lambda^2/4} (\lambda^2 - 2).
 \end{aligned}$$

(b) Partendo ad una coppia nota f, \hat{f} ed usando le regole di calcolo delle trasformate di Fourier, ottengo

$$\begin{array}{llll}
 & H(x) e^{-x} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \frac{1}{1+i\lambda} \\
 [x \rightarrow x-2] & H(x-2) e^{-x+2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \frac{e^{-2i\lambda}}{1+i\lambda} \\
 [f(x) \rightarrow xf(x)] & H(x-2) x e^{-x+2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & ie^{-2i\lambda} \frac{2\lambda-3i}{(1+i\lambda)^2} \\
 [f(x) \rightarrow e^{-2} f(x)] & H(x-2) x e^{-x} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & e^{-2i\lambda-2} \frac{3+2i\lambda}{(1+i\lambda)^2}
 \end{array}$$

(7) (6 pt). Enunciare e dimostrare il teorema del residuo all'infinito.

(8) (6 pt). Sia $h : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ una funzione analitica in un anello aperto che contiene la circonferenza unitaria e sia $f(\vartheta) := h(e^{i\vartheta})$. Dimostrare che lo sviluppo in serie di Fourier per f può essere derivato direttamente dalla serie di Laurent per h .