Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S5

Filippo Cesi – 2017–18

Nome	
Cognome	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
test	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (6 pt[1]). Calcolare il raggio di convergenza delle serie di potenze

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2n})^{\sqrt{n}}\, z^n \qquad\qquad (b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (1-2i)^n\, e^{-2n}\, z^{2n}$$

Risp: (a) 1. (b) $\frac{e}{\sqrt[4]{5}}$.

(2) (8 pt). Determinare le singolarità isolate, la loro natura, e, per i poli, trovare l'ordine.

$$(a) \quad \frac{(z+1)^2\,(z^2-9)}{1+\cos(\pi z)} \qquad\qquad (b) \quad \frac{\exp(1/z^2)}{z^2(z^2+1)}$$

Soluzione. (a) Numeratore e denominatore sono funzioni intere, quindi il quoziente è analitico ovunque tranne quando si annulla il denominatore. Cerco gli zeri del denominatore

$$\begin{aligned} &D(z) := 1+\cos(\pi z) = 0 \\ &\pi z = (2k+1)\pi \qquad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

L'insieme delle singolarità è dato da tutti gli interi dispari

$$S := \{z_k = 2k+1 : k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Poiché

$$\begin{aligned} D'(z_k) &= -\pi \sin(\pi z_k) = 0 \\ D''(z_k) &= -\pi^2 \cos(\pi z_k) = \pi^2 \neq 0\,, \end{aligned}$$

posso affermare che

$$z_k = 2k+1 \text{ è uno zero di molteplicità 2 di } D(z) \text{ per ogni } k \in \mathbb{Z}\,. \tag{0.1}$$

D'altra parte, per quanto riguarda il numeratore $N(z)$, si ha evidentemente

$$\begin{aligned} &z = -1 \text{ è uno zero di molteplicità 2 di } N(z) \\ &z = 3 \text{ e } z = -3 \text{ sono zeri di molteplicità 1 di } N(z) \end{aligned} \tag{0.2}$$

Usando le informazioni sugli zeri del denominatore e del numeratore, si ottiene, per quanto riguarda il quoziente $f(z) = N(z)/D(z)$,

$$\begin{aligned} &z = -1 \text{ è una singolarità eliminabile di } f \\ &z = 3 \text{ e } z = -3 \text{ sono poli di ordine 1 di } f \\ &\text{tutti gli altri interi dispari sono poli di ordine 2 di } f. \end{aligned}$$

(b). Risposta:

$$\begin{aligned} &z = 0 \text{ è una singolarità essenziale} \\ &z = i \text{ e } z = -i \text{ sono poli di ordine 1.} \end{aligned}$$

[1] 1 pt = 0.5 trentesimi

(3) (6 pt). Calcolare

$$\int\limits_{|z-3i|=4} \frac{dz}{z\,(e^z-1)}$$

Schema di soluzione. Sia

$$f(z) = \frac{1}{z\,(e^z-1)}\,.$$

La funzione f ha le seguenti singolarità isolate

$$\begin{aligned} &z_0 = 0 && \text{polo di ordine 2} \\ &z_k = i2k\pi,\ k\in\mathbb{Z},\ k\neq 0 && \text{polo di ordine 1} \end{aligned}$$

Le singolarità interne al cammino di integrazione sono $z_0 = 0$ e $z_1 = 2\pi i$. Si calcola facilmente

$$\operatorname{Res}(f,0) = -\frac{1}{2} \qquad\qquad \operatorname{Res}(f,2\pi i) = -\frac{i}{2\pi}\,.$$

Quindi

$$\int\limits_{|z-3i|=4} \frac{dz}{z\,(e^z-1)} = 2\pi i\left[\operatorname{Res}(f,0)+\operatorname{Res}(f,2\pi i)\right] = 1 - i\pi\,.$$

(4) (6 pt). Calcolare il seguente integrale esprimendo il risultato in termini di quantità palesemente reali.

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+4)^2}\,dx$$

Risp: $\frac{3\pi}{32e^2}$.

(5) (8 pt). Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni, riconducendosi, se possibile, a casi noti

$$(a)\ \ \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \qquad\qquad (b)\ \ xe^{-|2x+1|}\,.$$

Soluzione. (a) Sia $f(x) := \frac{x^2}{(1+x^2)^2}$. Ponendo

$$h(x) := \frac{1}{1+x^2}\,,$$

si ha

$$h'(x) := \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\,,$$

quindi

$$f(x) = -\frac{1}{2}xh'(x)\,.$$

Utilizzando le proprietà della trasformata di Fourier si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(x)](\lambda) &= -\frac{1}{2}\,\mathcal{F}[xh'(x)](\lambda) = -\frac{i}{2}\,D\mathcal{F}[h'(x)](\lambda) \\
&= -\frac{i}{2}\,\frac{d}{d\lambda}\big(i\lambda\mathcal{F}[h(x)](\lambda)\big) \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{d}{d\lambda}\big(\lambda\pi e^{-|\lambda|}\big) \\
&= \frac{\pi}{2}\,\big(e^{-|\lambda|} - \lambda e^{-|\lambda|}\,\mathrm{sgn}(\lambda)\big) \\
&= \frac{\pi}{2}\,e^{-|\lambda|}\,(1-|\lambda|)\,.
\end{aligned}$$

(b) Sia $f(x) := xe^{-|2x+1|}$. Ponendo

$$h(x) := e^{-|x|}$$

si ha

$$f(x) = x\,h(2x+1)\,.$$

Utilizzando le proprietà della trasformata di Fourier si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(x)](\lambda) &= \mathcal{F}[xh(2x+1)](\lambda) = i\frac{d}{d\lambda}\mathcal{F}[h(2x+1)](\lambda) \\
&= i\frac{d}{d\lambda}\big(e^{i\lambda/2}\frac{1}{2}\mathcal{F}[h(x)](\lambda/2)\big) = i\frac{d}{d\lambda}\Big(e^{i\lambda/2}\frac{1}{2}\frac{2}{1+(\lambda/2)^2}\Big) \\
&= 4i\frac{d}{d\lambda}\frac{e^{i\lambda/2}}{4+\lambda^2} = 4ie^{i\lambda/2}\left[\frac{i/2}{4+\lambda^2} - \frac{2\lambda}{(4+\lambda^2)^2}\right] \\
&= 4i\frac{e^{i\lambda/2}}{4+\lambda^2}\left[\frac{i}{2} - \frac{2\lambda}{4+\lambda^2}\right] = 2i\frac{e^{i\lambda/2}}{4+\lambda^2}\left[i - \frac{4\lambda}{4+\lambda^2}\right] \\
&= 2i\frac{e^{i\lambda/2}}{(4+\lambda^2)^2}\left[4i + i\lambda^2 - 4\lambda\right] \\
&= -2\frac{e^{i\lambda/2}}{(4+\lambda^2)^2}\left[\lambda^2 + 4i\lambda + 4\right]\,.
\end{aligned}$$

(6) (6 pt). Sia $\hat{f}$ la trasformata di Fourier della funzione f. Senza dover calcolare $\hat{f}$, è possibile affermare che $\hat{f}$ è di classe C^p e che $\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^q\hat{f}(\lambda) = 0$, in cui p e q valgono ...

$$f(x) = \begin{cases} \cos^3(x) & \text{se } x \in [-\pi/2, \pi/2] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Schema di soluzione. La funzione f è continua a supporto compatto, quindi $x^k f \in L_1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Di conseguenza $\hat{f} \in C^\infty$.

Inoltre, si vede facilmente che f, f' e f'' sono continue, mentre $f^{(3)}$ è continua a tratti. Dal teorema che lega regolarità e andamento all'infinito di una funzione e della sua trasformata di Fourier segue che $\hat{f}(\lambda)$ tende a zero quando $\lambda \to \infty$ più velocemente di $1/\lambda^3$. Vedi, per i dettagli, la soluzione di un problema quasi identico in 10-11/S2.

(7) (8 pt). Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato ($\lfloor x \rfloor$ è la parte intera di x, cioè il più grande numero intero minore od uguale ad x)

$$(a)\quad D^4\big(e^{2x}\,\delta_0^{(3)}\big) \qquad\qquad (b)\quad D\big(\sin(\pi x)\lfloor x \rfloor\big)\,.$$

Soluzione. (a) Si ha

$$e^{2x}\,\delta_0^{(3)} = \binom{3}{0} e^0\,\delta_0^{(3)} - \binom{3}{1}\left[De^{2x}\right]_{x=0}\,\delta_0'' + \binom{3}{2}\left[D^2e^{2x}\right]_{x=0}\,\delta_0' - \binom{3}{3}\left[D^3e^{2x}\right]_{x=0}\,\delta_0$$

$$\delta_0^{(3)} - 6\,\delta_0'' + 12\,\delta_0' - 8\delta_0\,.$$

Quindi

$$D^4\big(e^{2x}\,\delta_0^{(3)}\big) = \delta_0^{(7)} - 6\,\delta_0^{(6)} + 12\,\delta_0^{(5)} - 8\delta_0^{(4)}\,.$$

(b) Usando la regola di derivazione di un prodotto fra una distribuzione e una funzione C^∞, si ottiene

$$D[\sin(\pi x)\lfloor x\rfloor] = \pi\cos(\pi x)\lfloor x\rfloor + \sin(\pi x)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_k = \pi\cos(\pi x)\lfloor x\rfloor + \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sin(k\pi)\delta_k = \pi\cos(\pi x)\lfloor x\rfloor$$

(8) (6 pt). Calcolare il seguente integrale scritto nella notazione "dei fisici", semplificando il più possibile il risultato.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,\delta(\sin(ax))\,dx \qquad a\in\mathbb{R},\ a>0\,.$$

Soluzione. La funzione $b(x) := \sin(ax)$ si annulla nei punti

$$\sin(ax) = 0 \quad\iff\quad x_k = \frac{k\pi}{a} \text{ con } k\in\mathbb{Z}\,.$$

Poiché

$$|b'(x_k)| = |a\,\cos(2x_k)| = |a\cos(k\pi)| = |a\,(-1)^k| = a\,,$$

si ottiene

$$\delta(\sin(ax)) = \frac{1}{a}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_{\kappa\pi/a}\,.$$

Quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,\delta(\sin(ax))\,dx = \frac{1}{a}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,\delta(x-\kappa\pi/a)\,dx$$

$$= \frac{1}{a}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-|k\pi/a|} = \frac{1}{a}\Big(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k\pi/a}\Big)$$

$$= \frac{1+e^{-\pi/a}}{a(1-e^{-\pi/a})}\,.$$