La Lista (v1.0)

Questa lista verrà aggiornata continuamente con l'inserimento di

(1) argomenti trattati durante il corso

(2) prerequisiti necessari la cui conoscenza è ritenuta indispensabile

Attenzione: l'inserimento di nuovi elementi non avviene necessariamente alla fine della lista. Controllate sempre tutte le sezioni.

1 Varie

(V1) (Coefficiente binomiale). Se $n, k \in \mathbb{N}$, definisco

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\cdots\,(n-k+1)}{k!}\,.$$

(V2) (Coefficiente binomiale generalizzato). Se $b \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ e $k \in \mathbb{N}$, definisco

$$\binom{b}{k} := \frac{b\,(b-1)\,(b-2)\,\cdots\,(b-k+1)}{k!}\,.$$

Esempio:

$$\binom{1/2}{4} = \frac{(1/2)\,(-1/2)\,(-3/2)\,(-5/2)}{4!} = -\frac{5}{128}$$

(V3) (Potenza di un binomio).

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} \qquad a, b \in \mathbb{R}(\mathbb{C}),\ n \in \mathbb{N}\,.$$

(V4) (Somma geometrica finita).

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\,.$$

2 Analisi reale

(AR1) (Def: estremo superiore). Sia A un insieme di numeri reali. Il numero reale s è detto *estremo superiore* di A (e si scrive $s = \sup A$) se

(a) per ogni $x \in A$ si ha $x \leq s$

(b) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x \in A$ tale che $x > s - \varepsilon$.

(AR2) (Sviluppo di Taylor con resto di Lagrange). Sia $f \in C^{n+1}(a,b)$ e $x_0 \in (a,b)$. Allora, per ogni $x \in (a,b)$ esiste $\xi(x)$ compreso fra x_0 e x tale che

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\,(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n$$
$$+ \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}$$

(AR3) (Alcuni sviluppi in serie di potenze).

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (|x|<1)$$
$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (x \in \mathbb{R})$$
$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (x \in \mathbb{R})$$
$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad (|x|<1) \qquad \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x|<1)$$

(AR4) (Condizione necessaria per la convergenza di una serie: la successione associata è infinitesima). Se la serie di numeri reali (o complessi) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è convergente, allora si ha $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

(AR5) (Controesempio: La condizione $a_k \to 0$ non è sufficiente per la convergenza della serie associata). Sia $a_k = 1/k$. Allora $a_k \to 0$, ma $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k = \infty$.

(AR6) (Convergenza di una serie o di un integrale speciale). La serie e l'integrale

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha\,(\log k)^\beta} \qquad \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha\,(\log x)^\beta}$$

sono convergenti se e solo se $\alpha > 1$ oppure se $\alpha = 1$ e $\beta > 1$.

(AR7) (Integrali notevoli). Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\int_0^{\infty} x^n\, e^{-x}\, dx = n! \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, x^{2n}\, dx = (2n-1)!!$$

3 I numeri complessi

(NC1) (Def: campo). Definizione di campo.

(NC2) (Def: definizione del modulo, usando il coniugato). $|z| := \sqrt{z\,\bar{z}}$.

(NC3) (Def: definizione del modulo, usando la parte reale e la parte immaginaria). Se $z = x + iy$ con x, y reali, $|z| := \sqrt{x^2+y^2}$.

(NC4) (Proprietà del modulo e della coniugazione).

(a) $\overline{w+z} = \overline{w} + \overline{z}$.
(b) $\overline{w\,z} = \overline{w}\,\overline{z}$.
(c) $\overline{\overline{z}} = z$.
(d) $|w\,z| = |w|\,|z|$.
(e) $|\overline{z}| = |z|$.
(f) $|w+z| \le |w| + |z|$ (disuguaglianza triangolare).
(g) $|w \pm z| \ge \big||w| - |z|\big|$ (disuguaglianza triangolare inversa).
(h) $|w+z|^2 + |w-z|^2 = 2\big(|w|^2 + |z|^2\big)$ (regola del parallelogramma).

(NC5) (Forma polare, argomento). $z \in \mathbb{C}$ è espresso in *forma polare* se $z = \rho\, e^{i\vartheta}$, in cui ρ è un numero reale *positivo* e ϑ è un numero reale. L'*argomento* di z e si denota con $\arg z$ ed è definito come

$$\arg z := \vartheta + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

(NC6) (Argomento principale). Se $z = \rho e^{i\vartheta}$ è espresso in forma polare l'*argomento principale* di z si denota con $\operatorname{Arg} z$ ed è dato dall'unico valore di $\vartheta' = \vartheta + 2k\pi$ tale che $-\pi < \vartheta' \le \pi$.

(NC7) (Argomento con il taglio sul semiasse reale positivo, "argomento più"). Se $z = \rho e^{i\vartheta}$ è espresso in forma polare l'*argomento più* di z si denota con $\arg_+ z$ ed è dato dall'unico valore di $\vartheta' = \vartheta + 2k\pi$ tale che $0 \le \vartheta' < 2\,\pi$.

(NC8) (Esempio: forma polare, argomento). $z = 3e^{i(15\pi/4)}$ è espresso in forma polare. Quindi

$$\begin{aligned}
&\arg z = \frac{15\pi}{4} + 2k\pi = \{\ldots, -\frac{9\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}, \frac{23\pi}{4}, \frac{31\pi}{4}, \ldots\} = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \\
&\operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{4} \\
&\arg_+ z = \frac{7\pi}{4}\,.
\end{aligned}$$

(NC9) (Non Esempio: forma polare, argomento). *Attenzione:* $z = -3e^{i(5\pi/4)}$ *non* è espresso in forma polare a causa del segno meno. Quindi per trovare l'argomento di z bisogna prima scriverlo correttamente in forma polare. Usando l'identità $-1 = e^{i\pi}$ si trova

$$z = -3e^{i(5\pi/4)} = 3e^{i\pi}e^{i(5\pi/4)} = 3e^{i(9\pi/4)}\,.$$

A questo punto si procede come al punto (NC8).

(NC10) (Trasformazione polare $\to$ rettangolare). Se $z = \rho\, e^{i\vartheta}$,

$$\operatorname{Re} z = \rho\,\cos\vartheta \qquad \operatorname{Im} z = \rho\,\sin\vartheta$$

(NC11) (Trasformazione rettangolare $\to$ polare). Se $z = x + iy$,

$$\begin{aligned}
\rho &= |z| = \sqrt{x^2+y^2} \\
\vartheta &= \arctan(y/x) \underbrace{+\,\pi}_{\text{se } x<0} + 2k\pi\,.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

(NC12) (Esempio: trasformazione rettangolare $\to$ polare). Se $z = -1 - i$, si ha

$$\arctan(y/x) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}\,.$$

Poichè z si trova nel terzo quadrante devo aggiungere π e ottengo

$$\vartheta = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}\,.$$

L'argomento generico di z è dato da

$$\arg z = \vartheta + 2k\pi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\,.$$

Per trovare l'argomento principale e l'argomento più bisogna, a questo punto, scegliere il k "giusto". Si trova

$$\operatorname{Arg} z = \vartheta - 2\pi = -\frac{3\pi}{4} \qquad\qquad \arg_+ z = \vartheta = \frac{5\pi}{4}\,.$$

(NC13) (Potenza di un numero espresso in forma polare). Se $z = \rho e^{i\vartheta}$, allora $z^n = \rho^n\, e^{in\vartheta}$.

(NC14) (Formula di De Moivre). $(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^n = \cos(n\vartheta) + i\sin(n\vartheta)$.

(NC15) (Soluzione dell equazione $z^n = w$. Aspetto algebrico). Per trovare tutte le soluzioni di $z^n = w$: scrivere w in forma polare $w = r\, e^{i\alpha}$. Quindi si ha:

$$z = \sqrt[n]{r}\, \exp\left[i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

(NC16) (Soluzione dell equazione $z^n = w$. Aspetto geometrico). Le soluzioni di $z^n = w$ sono i vertici di un poligono regolare con n lati e si trovano sulla circonferenza centrata in 0 di raggio $\sqrt[n]{|w|}$ (fig. 1).

4 Luoghi geometrici nel piano complesso

(LG1) $\{|z-a| = r\}$. Circonferenza di centro a e raggio r.

(LG2) $\{|z-a| \le r\}$. Disco chiuso di centro a e raggio r.

(LG3) $\{r_1 \le |z-a| \le r_2\}$. Corona circolare di centro a e raggi r_1, r_2.

(LG4) $\{|z-a| = |z-b|\}$. Asse del segmento $[a,b]$.

(LG5) $\{|z-a| \le |z-b|\}$. Semipiano delimitato dall'asse del segmento $[a,b]$ contenente a.

(LG6) $\{a \le |z| \le b,\ c \le \arg z \le d\}$. Settore di corona circolare centrato nell'origine, di raggi a e b e angoli c e d.

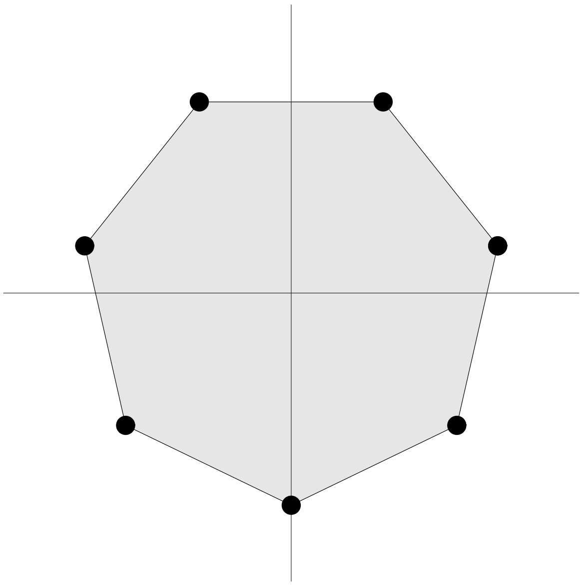


Figura 1: Le 7 soluzioni dell'equazione $z^7 = 2i$.

5 Mappe elementari

(MAP1) $w = f(z) = z + a$. Traslazione.

(MAP2) $w = f(z) = uz$. Dilatazione di un fattore $|u|$ e rotazione attorno all'origine di un angolo $\arg u$. Esempio: $f(z) = 2iz$, quindi $u = 2i$, $|u| = 2$ e $\arg u = \pi/2$. In questo caso si ha una duplicazione delle dimensioni lineari e una rotazione di 90 gradi (fig. 2).

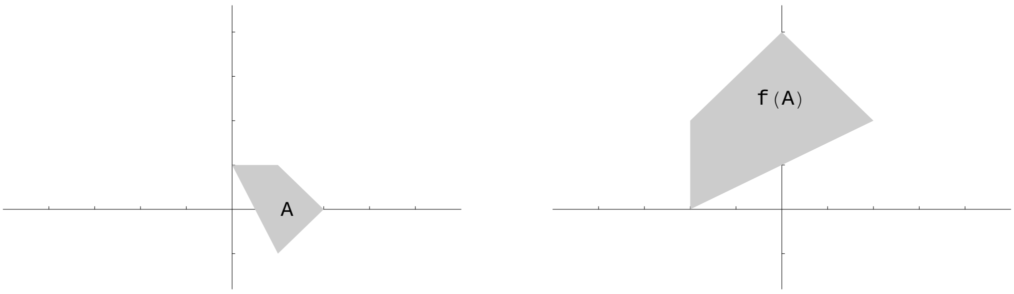


Figura 2: Mappa $w = 2iz$

(MAP3) $w = f(z) = z^n$. Il settore di corona circolare $A = \{\rho_1 \leq |z| \leq \rho_2,\ \vartheta_1 \leq \arg z \leq \vartheta_2\}$ si trasforma nel settore di corona circolare $f(A) = \{\rho_1^n \leq |w| \leq \rho_2^n,\ n\vartheta_1 \leq \arg w \leq n\vartheta_2\}$ (fig. 3). Nel caso in cui $n(\vartheta_2 - \vartheta_1) \geq 2\pi$, l'insieme $f(A)$ è una corona circolare.

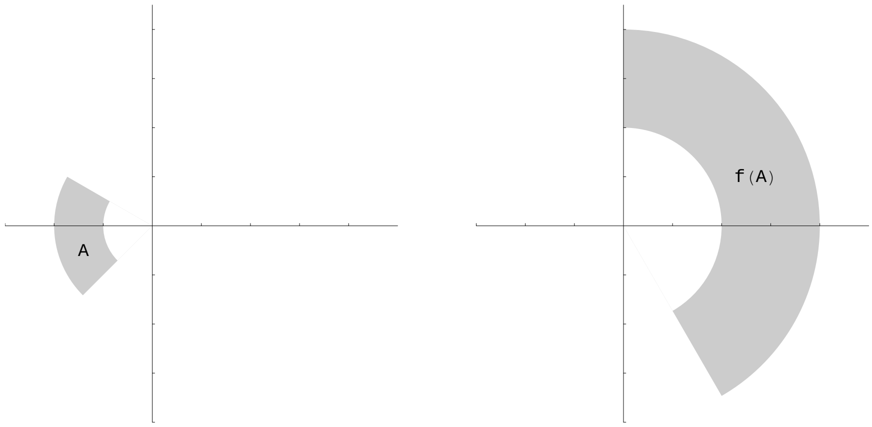


Figura 3: Mappa $w = z^2$

(MAP4) $w = f(z) = \exp z$. Il rettangolo $A = \{a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$ si trasforma nel settore di corona circolare $f(A) = \{e^a \leq |w| \leq e^b,\ c \leq \arg w \leq d\}$ (fig. 4). Nel caso in cui $d - c \geq 2\pi$, l'insieme $f(A)$ è una corona circolare.

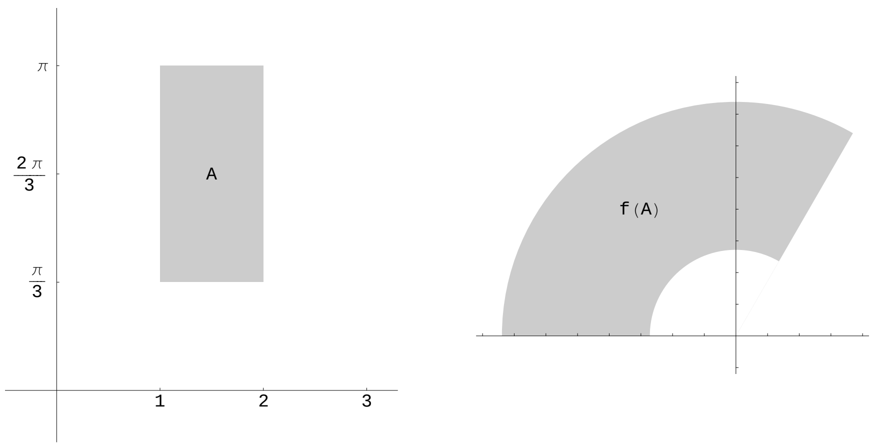


Figura 4: Mappa $w = \exp z$

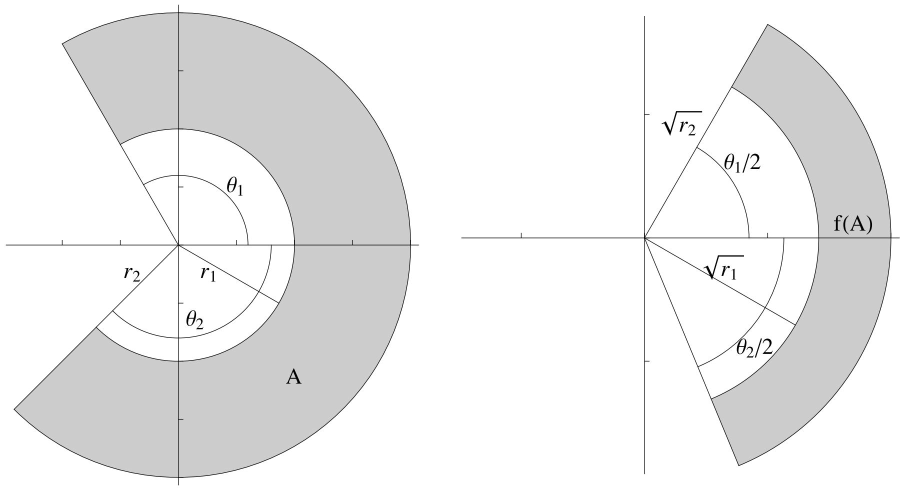


Figura 5: Mappa $w = \sqrt{z}$

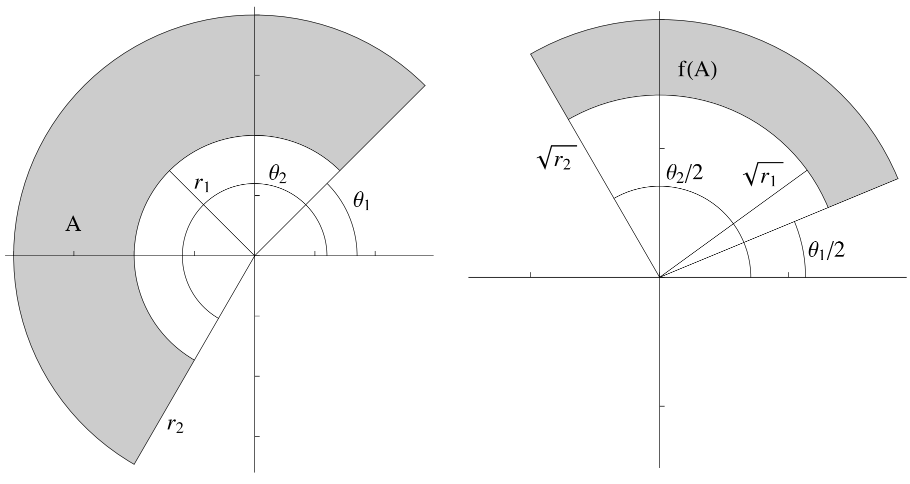


Figura 6: Mappa $w = \sqrt{z}^{(+)}$

(MAP5) $w = f(z) = \sqrt[n]{z}$. Siano $\vartheta_1, \vartheta_2 \in [0, \pi)$. Il settore di corona circolare

$$A := \{re^{i\vartheta} : r_1 \le r \le r_2,\ -\vartheta_1 \le \vartheta \le \vartheta_2\}$$

si trasforma nel settore di corona circolare

$$f(A) := \{re^{i\vartheta} :\ \sqrt[n]{r_1} \le r \le \sqrt[n]{r_2},\ -\vartheta_1/n \le \vartheta \le \vartheta_2\}\,.$$

Vedi figura 5.

(MAP6) $w = f(z) = \sqrt[n]{z}^{(+)}$. Siano $\vartheta_1, \vartheta_2 \in (0, 2\pi)$. Il settore di corona circolare

$$A := \{re^{i\vartheta} : r_1 \le r \le r_2,\ \vartheta_1 \le \vartheta \le \vartheta_2\}$$

si trasforma nel settore di corona circolare

$$f(A) := \{re^{i\vartheta} :\ \sqrt[n]{r_1} \le r \le \sqrt[n]{r_2},\ \vartheta_1/n \le \vartheta \le \vartheta_2\}\,.$$

Vedi figura 6.

6 Serie di potenze

(SP1) (Formula di Stirling). Per ogni intero positivo n si ha

$$n! = n^n\, e^{-n} \sqrt{2\pi n}\,(1 + \varepsilon_n) \quad \text{in cui } \varepsilon_n \to 0.$$

(SP2) (Def: limite superiore di una successione reale). Il *limite superiore* della successione reale (a_n) è definito come

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n := \lim_{n\to\infty} \sup_{k\ge n} a_k\,.$$

(SP3) (Alcune proprietà del limite superiore).

(a) $\overline{\lim}_n (a_n + b_n) \le \overline{\lim}_n\, a_n + \overline{\lim}_n\, b_n$

(b) Se $a_n \ge 0$ e $b_n \ge 0$, allora $\overline{\lim}_n (a_n\, b_n) \le (\overline{\lim}_n\, a_n)\,(\overline{\lim}_n\, b_n)$

(c) Se $\lim_n a_n = a$ e $a > 0$, allora $\overline{\lim}_n (a_n\, b_n) = a \cdot (\overline{\lim}_n\, b_n)$.

(SP4) (Raggio di convergenza di una serie di potenze). Il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ è dato da

$$R = \left(\overline{\lim}_n\, |c_n|^{1/n}\right)^{-1} \in [0, \infty]\,.$$

Valgono le seguenti identità, a patto che esistano i limiti al secondo membro:

$$R = \big(\lim_n |c_n|^{1/n}\big)^{-1} \qquad \text{(criterio della radice)}$$

$$R = \lim_n \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \qquad \text{(criterio del rapporto)}$$

(SP5) Sia $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ crescente. Allora il raggio di convergenza R della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{g(n)}$$

è dato da

$$R := \left(\limsup |a_n|^{1/g(n)}\right)^{-1}$$

(SP6) (Trucco: butta via le potenze di n). Se $\alpha \in \mathbb{R}$, le due serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \,(z - z_0)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n^{\alpha}\, c_n \,(z - z_0)^n$$

hanno lo stesso r.d.c., quindi, *ai soli fini del calcolo del r.d.c*, il fattore n^{α} può essere eliminato.

(SP7) (Alcuni sviluppi in serie di potenze).

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (z \in \mathbb{C}) \qquad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1)$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (z \in \mathbb{C}) \qquad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (z \in \mathbb{C})$$

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (z \in \mathbb{C}) \qquad \cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (z \in \mathbb{C})$$

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} \quad (|z| < 1) \qquad \arctan z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \quad (|z| < 1)$$

(SP8) (Condizione necessaria per la convergenza di una serie: la successione associata è infinitesima). Se la serie di numeri reali (o complessi) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è convergente, allora si ha $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

(SP9) (Controesempio: La condizione $a_k \to 0$ non è sufficiente per la convergenza della serie associata). Sia $a_k = 1/k$. Allora $a_k \to 0$, ma $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k = \infty$.

7 Funzioni analitiche

(FA1) (Def: funzioni differenziabili e analitiche). Sia G aperto in $\mathbb{C}$, $a \in G$ e $f : G \mapsto \mathbb{C}$. f è detta *differenziabile* in a se esiste il limite

$$f'(a) := \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad h \in \mathbb{C}.$$

f è detta *analitica* se è differenziabile con derivata continua.

(FA2) (Teo: differenziazione di una serie di potenze). Sia

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z - z_0)^n \qquad z \in B_R(z_0)\,, \tag{7.1}$$

in cui R è il r.d.c. della serie. Allora

(a) f è infinitamente differenziabile in $B_R(z_0)$

(b) le derivate si posso fare "termine a termine", vale a dire

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n\,(n-1)\,\cdots\,(n-k+1)\,c_n\,(z - z_0)^{n-k} \qquad z \in B_R(z_0) \tag{7.2}$$

(c) la serie di potenze (7.2) ha lo stesso r.d.c. R della serie di potenze (7.1).

(d) $c_n = f^{(n)}(z_0)/n!$.

(FA3) (Cor: serie di potenze $\Rightarrow$ analitica). Una serie di pontenze centrata in z_0 con r.d.c. R è una funzione analitica in $B_R(z_0)$.

(FA4) (Teo: se $f' = 0$, f è costante). Sia G aperto e connesso in $\mathbb{C}$ e sia $f : G \mapsto \mathbb{C}$ una funzione differenziabile tale che $f'(z) = 0$ per ogni $z \in G$. Allora f è costante su G.

8 Funzioni elementari e loro proprietà

(FE1) (Alcune proprietà dell'esponenziale).

(a) $De^z = e^z$.

(b) $e^w\, e^z = e^{w+z}$.

(c) e^z non è mai uguale a zero (segue da $e^z\, e^{-z} = 1$).

(d) $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$.

(e) $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$.

(f) $\operatorname{Re} e^z = e^{\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z)$. Esempio: $\operatorname{Re}(e^{3+2i}) = e^3 \cos(2)$.

(g) $\operatorname{Im} e^z = e^{\operatorname{Re} z} \sin(\operatorname{Im} z)$.

(h) exp è $2\pi i$ periodica, vale a dire se k è un intero, si ha $e^{z+i(2k\pi)} = e^z$.

(FE2) (Alcune proprietà delle funzioni trigonometriche).

(a) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

(b) $D(\sin z) = \cos z$

(c) $D(\cos z) = -\sin z$

(d) $\sin(w \pm z) = \sin w\, \cos z \pm \cos w\, \sin z$.

(e) $\cos(w \pm z) = \cos w\, \cos z \mp \sin w \sin z$.

(f) $\cos^2 z = (1 + \cos(2z))/2$.

(g) $\sin^2 z = (1 - \cos(2z))/2$.

(FE3) (Legame fra funzioni trigonometriche e iperboliche).

(a) $\sin(iz) = i \sinh(z)$.

(b) $\cos(iz) = \cosh(z)$.

(FE4) (Trucco: come ricavare velocemente le proprietà delle funzioni iperboliche, a partire dalle analoghe proprietà delle funzioni trigonometriche).

(a) Esempio: sapendo che $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, sostituisco $z \to iz$ e ottengo $\cos^2(iz) + \sin^2(iz) = 1$. Quindi, ricordando la relazione fra sin e sinh e quella fra cos e cosh, trovo

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \, .$$

(b) Esempio: analogamente, a partire da $\sin(w+z) = \sin w \, \cos z + \cos w \, \sin z$, si ricava

$$\sinh(w + z) = \sinh w \, \cosh z + \cosh w \, \sinh z \, .$$

(FE5) (Parte reale ed immaginaria delle funzioni trigonometriche ed iperboliche).

(a) $\mathrm{Re}(\sin z) = \sin(\mathrm{Re}\, z) \cosh(\mathrm{Im}\, z)$

(b) $\mathrm{Im}(\sin z) = \cos(\mathrm{Re}\, z) \sinh(\mathrm{Im}\, z)$

(c) $\mathrm{Re}(\cos z) = \cos(\mathrm{Re}\, z) \cosh(\mathrm{Im}\, z)$

(d) $\mathrm{Im}(\cos z) = -\sin(\mathrm{Re}\, z) \sinh(\mathrm{Im}\, z)$.

Queste relazioni e le analoghe per le funzioni iperboliche non è necessario ricordarle a memoria. Infatti si possono ottenere velocemente a partire dalle formule di addizione degli degli archi e dalle relazioni che legano funzioni trigonometriche e iperboliche. Esempio: sia $z = x + iy$. Allora

$$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \, \cos(iy) + \cos x \, \sin(iy) = \sin x \, \cosh y + i \, \cos x \, \sinh y \, ,$$

da cui si ottiene

$$\mathrm{Re}(\sin z) = \sin x \, \cosh y \qquad\qquad \mathrm{Im}(\sin z) = \cos x \, \sinh y \, ,$$

(FE6) (Equazione $\exp z = w$). Se $w \neq 0$, le soluzioni dell'equazione $\exp z = w$ sono date da

$$z = \log |w| + i(\arg w + 2k\pi) \qquad k \in \mathbb{Z} \, .$$

Si noti che ci sono *infinite soluzioni* e che queste giacciono sulla retta verticale $x = \log |w|$ a distanza 2π l'una dalla successiva.

Se $w = 0$, l'equazione $\exp z = w$ non ha soluzioni (perchè l'esponenziale complesso non si annulla mai).

(FE7) (Equazione $\sin z = w$. Informazioni qualitative sulle soluzioni). L'equazione $\sin z = w$ ha sempre infinite soluzioni. Ci sono due casi:

(a) se c'è una soluzione reale, allora le soluzioni sono tutte reali, vale a dire sono quelle già note dalla trigonometria reale, del tipo

$$\{\vartheta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \vartheta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Ad esempio

$$\sin z = 1/2 \qquad \Rightarrow \qquad z = \pi/6 + 2k\pi \text{ oppure } z = 5/6\pi + 2k\pi\,.$$

(b) se c'è una soluzione non reale, allora tutte le soluzioni sono non reali e sono disposte su due rette orizzontali equidistanti dall'asse x. Più precisamente l'insieme delle soluzioni è del tipo

$$\{\vartheta + 2k\pi - i\beta\} \cup \{\pi - \vartheta + 2k\pi + i\beta\}$$

(FE8) (Equazione $\cos z = w$. Informazioni qualitative sulle soluzioni). L'equazione $\cos z = w$ ha sempre infinite soluzioni. Ci sono due casi:

(a) se c'è una soluzione reale, allora le soluzioni sono tutte reali, vale a dire sono quelle già note dalla trigonometria reale, del tipo

$$\{\pm\vartheta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

Ad esempio

$$\cos z = 1/2 \qquad \Rightarrow \qquad z = \pm\pi/3 + 2k\pi\,.$$

(b) se c'è una soluzione non reale, allora tutte le soluzioni sono non reali e sono disposte su due rette orizzontali equidistanti dall'asse x. Più precisamente l'insieme delle soluzioni è del tipo

$$\{\vartheta + 2k\pi - i\beta\} \cup \{-\vartheta + 2k\pi + i\beta\}$$

(FE9) (Def: ramo del logaritmo). Un *ramo del logaritmo* è una funzione continua $f : G \mapsto \mathbb{C}$ in cui G è una regione (inseme aperto e connesso) in $\mathbb{C}$ e $\exp f(z) = z$ (vale a dire f è l'inversa dell'esponenziale).

(FE10) (Def: ramo principale del logaritmo). Il *ramo principale* del logaritmo è definito sull'insieme $G := \mathbb{C}\backslash\{z \leq 0\}$ come

$$\log z := \log|z| + i\,\mathrm{Arg}\,z$$

(ricorda che Arg è l'argomento principale).

(FE11) (Notazione. log = "ramo principale"). A meno che non venga detto explicitamente il contrario, denotiamo con $\log z$ il ramo principale del logaritmo.

(FE12) (Def: ramo "più" del logaritmo). Il ramo "più" del logaritmo è definito sull'insieme $G := \mathbb{C}\backslash\{z \geq 0\}$ come

$$\log_+ z := \log|z| + i\arg_+ z$$

(FE13) (Occhio: non è sempre vero che $\log(e^z) = z$). Mentre è sempre vero, per un qualsiasi ramo del logaritmo, che $\exp(\log z) = z$ (per definizione!), non è detto che valga la stessa identità a funzioni invertite, cioè $\log(e^z) = z$. Ad esempio, sia $\log z$ il ramo principale del logaritmo. Allora:

$$\log\bigl(e^{i3\pi/2}\bigr) = \log\bigl|e^{i3\pi/2}\bigr| + i\,\mathrm{Arg}\bigl(e^{i3\pi/2}\bigr) = -i\pi/2 \neq i3\pi/2\,.$$

(FE14) (Occhio: non è sempre vero che ...). Non è sempre vero che $\log(wz) = \log w + \log z$ o che $\log(z^n) = n\,\log z$. È facile trovare controesempi.

(FE15) (Derivata del log). $D(\log z) = 1/z$ (per un ramo qualsiasi!).

(FE16) (Def: potenze con esponente complesso non intero). Sia $\log z : G \mapsto \mathbb{C}$ un ramo arbitrario del logaritmo. Il ramo corrispondente della funzione z^w è definito come

$$z^w := e^{w\log z} \qquad z \in G\,.$$

(FE17) (Potenze con esponente complesso non intero. Ramo principale e ramo "più").

$$\begin{array}{lll} \text{ramo principale} & z^w := \exp(w\log z) & z \in \mathbb{C}\backslash\{z \leq 0\} \\ \text{ramo "più"} & [z^w]^{(+)} := \exp(w\log_+ z) & z \in \mathbb{C}\backslash\{z \geq 0\}\,. \end{array}$$

(FE18) (Potenze con esponente reale non intero. Ramo principale e ramo "più"). Nel caso di esponente *reale* le formule precedenti possono essere semplificate e, usando la definizione del logaritmo, si ottiene

$$\begin{aligned} z^a &= \exp(a\log|z| + ia\,\mathrm{Arg}\,z) = |z|^a\,e^{ia\,\mathrm{Arg}\,z} \\ [z^a]^{(+)} &= \exp(a\log|z| + ia\arg_+ z) = |z|^a\,e^{ia\arg_+(z)} \end{aligned}$$

(FE19) (Caso particolare di esponente reale: radice n-sima Ramo principale e ramo "più").

$$\begin{array}{ll} \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\,\mathrm{Arg}\,z/n} & z \in \mathbb{C}\backslash\{z \leq 0\} \\ \sqrt[n]{z}^{(+)} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\arg_+ z/n} & z \in \mathbb{C}\backslash\{z \geq 0\} \end{array}$$

9 Condizioni di Cauchy–Riemann

(CR1) (Teo: analitica $\Rightarrow$ Cauchy–Riemann). Sia G un aperto in $\mathbb{C}$ e sia $f : G \mapsto \mathbb{C}$ analitica. Poniamo

$$z = x + iy \qquad\qquad f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

Allora

(a) valgono le seguenti uguaglianze fra le derivate di u e v

$$u_x = v_y \qquad\qquad u_y = -v_x$$

(*b*) se u e v appartengono a $C^2(G)$, allora u e v sono armoniche, vale a dire $u_{xx}+u_{yy}=0$ e $v_{xx}+v_{yy}=0$.

(CR2) (Teo: Cauchy-Riemann $\Rightarrow$ analitica). Se G è una regione, $u, v \in C^1(G)$ e valgono le condizioni CR, allora la funzione complessa $f(z) := u(x,y) + iv(x,y)$ è analitica in G.

(CR3) (Def: armonica coniugata). Sia G aperto in $\mathbb{C}$. Data una funzione armonica $u : G \mapsto \mathbb{R}$, la funzione $v : G \mapsto \mathbb{R}$ è detta *armonica coniugata* di u se $f := u + iv$ è analitica su G.

(CR4) (Teo: esistenza dell'armonica coniugata). Sia $G \subset \mathbb{C}$ aperto e semplicemente connesso e sia $u : G \mapsto \mathbb{R}$ armonica. Allora esiste un'armonica coniugata v di u.

10 Integrazione nel campo complesso

(I1) (Def: cammino). Un *cammino* in $\mathbb{C}$ è una funzione continua $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$, in cui $[a,b]$ è un intervallo dell'asse reale.

(I2) (Def: cammino regolare). Un cammino γ è detto *regolare* se γ' esiste ed è continua.

(I3) (Def: cammino regolare a tratti). Un cammino γ è detto *regolare a tratti* (RAT) se esiste una partizione (t_i) del dominio $[a,b]$ tale che γ è regolare su ciascun intervallo $[t_i, t_{i+1}]$.

(I4) (Def: traccia di un cammino). La *traccia* del cammino $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ si indica con $\{\gamma\}$ ed è definita come $\{\gamma\} := \{\gamma(t) \in \mathbb{C} : t \in [a,b]\}$.

(I5) (Ma che differenza c'è fra un cammino e la sua traccia?) Un cammino è una funzione, mentre la sua traccia è l'immagine della funzione, quindi un sottoinsieme di $\mathbb{C}$. Ad esempio i due cammini

$$\gamma_1(t) := e^{it} \quad t \in [0, 2\pi] \qquad\qquad \gamma_2(t) := e^{i2t} \quad t \in [0, 2\pi]$$

sono diversi, poichè il primo percorre la circoferenza unitaria una volta, mentre il secondo la percorre due volte. Però γ_1 e γ_2 hanno la stessa traccia costituita appunto dalla circonferenza unitaria.

(I6) (Def: lunghezza di un cammino). La *lunghezza* del cammino $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ è definita come $V(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$.

(I7) (Def: integrale lungo un cammino regolare a tratti) Sia G aperto in $\mathbb{C}$, $f : G \mapsto \mathbb{C}$ continua e sia $\gamma : [a,b] \mapsto G$ un cammino RAT. Si definisce *integrale di f lungo γ* la quantità

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)\, dz := \int_a^b f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt\,.$$

(I8) (Proprietà dell'integrale).

(*a*) Se u e v sono due numeri complessi, allora $\int_\gamma (uf + vg) = u \int_\gamma f + v \int_\gamma g$.
(*b*) $\int_{-\gamma} f = -\int_\gamma f$
(*c*) $\int_{\gamma+w} f(z) dz = \int_\gamma f(z+w)\, dz$

(*d*) $|\int_\gamma f| \le \int_\gamma |f(z)|\,|dz| \le V(\gamma)\,\max_{\{\gamma\}} |f|$.

(I9) (Teo: teorema fondamentale del calcolo integrale). Sia G aperto in $\mathbb{C}$, sia $\gamma : [a, b] \mapsto G$ un cammino RAT. Se $f : G \mapsto \mathbb{C}$ è continua ed ammette una primitiva F su un aperto che contiene $\{\gamma\}$, allora

$$\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))\,.$$

(I10) (Cor: una condizione che implica integrale nullo). Siano G, f e γ come nel teorema precedente. Se f ammette una primitiva in G e γ è un cammino chiuso, allora $\int_\gamma f = 0$.

(I11) (Esempio: una classe importante di funzioni che ammettono una primitiva). Sia γ un cammino RAT chiuso. Allora

$$\int_\gamma (w-z)^n\,dw = 0 \qquad \text{se } n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$\int_\gamma \frac{dw}{(w-z)^n} = 0 \qquad \text{se } n = 2, 3, \ldots \text{ e } z \notin \{\gamma\}$$

(I12) (Formula integrale di Cauchy per cammini circolari). Sia G aperto in $\mathbb{C}$ e $f : G \mapsto \mathbb{C}$ analitica. Siano $z_0 \in G$ e $R > 0$ tale che $\overline{B}_R(z_0) \subset G$. Allora

$$\int_{|w-z_0|=R} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = 2\pi i f(z) \qquad \forall z \in B_R(z_0)\,.$$

(I13) (Analitica implica serie di potenze). Sia G aperto in $\mathbb{C}$ e $f : G \mapsto \mathbb{C}$ analitica. Sia $z_0 \in G$ e $D := \mathrm{dist}(z_0, G^c)$. Allora:

(1) la funzione f può essere sviluppata in serie di potenze come

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n \qquad z \in B_D(z_0)$$

(2) i coefficienti a_n sono dati da

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)\,dw}{(w-z_0)^{n+1}}$$

in cui $\gamma(t) := z_0 + Re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$ e $0 < R < D$.

(I14) (Teo: stima di Cauchy). Sia G aperto in $\mathbb{C}$ e $f : G \mapsto \mathbb{C}$ analitica. Sia $z_0 \in G$ e $R > 0$ tale che $\overline{B}_R(z_0) \subset G$. Se $|f(z)| \le M$ per ogni $z \in \overline{B}_R(z_0)$, allora

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{M\,n!}{R^n}$$

(I15) (Teo: teorema di Cauchy per cammini contenuti in un disco). Sia G aperto in $\mathbb{C}$ e $f : G \mapsto \mathbb{C}$ analitica. Se γ è un cammino chiuso, RAT, tale che la traccia di γ è contenuta in un disco $B_R(z_0) \subset G$. Allora

$$\int_\gamma f = 0\,.$$

11 Teorema di Liouville e Teorema Fondamentale dell'Algebra

(TEO1) (Def: funzione intera). Una *funzione intera* è una funzione analitica su $\mathbb{C}$.

(TEO2) (Teo: teorema di Liouville). Se f è una funzione intera e limitata, allora f è costante.

(TEO3) (Teo: fondamentale dell'Algebra). Se $p(z)$ è un polinomio di grado almeno 1 (non costante) allora esiste $w \in \mathbb{C}$ tale che $p(w) = 0$.

(TEO4) (Cor: fattorizzazione dei polinomi). Ogni polinomio di grado $n > 0$ su $\mathbb{C}$ può essere scritto nella forma

$$p(z) = \alpha\,(z - z_1)^{m_1}\,(z - z_2)^{m_2} \cdots (z - z_s)^{m_s} \qquad \alpha, z_i \in \mathbb{C},\ m_i \in \mathbb{N}^*\,.$$

in cui $m_1 = \cdots + m_s = n$.

(TEO5) (Def: molteciplità di uno zero di una funzione analitica). Sia G aperto in $\mathbb{C}$ e $f : G \mapsto \mathbb{C}$ analitica e sia $z_0 \in G$ tale che $f(z_0) = 0$. Il punto z_0 è detto uno *zero di molteplicità* m, con m intero positivo, se esiste g analitica su G tale che

$$f(z) = (z - z_0)^m\, g(z) \qquad \text{e } g(z_0) \neq 0\,.$$

(TEO6) (Teo: ogni zero di una funzione analitica ha una molteplicità). Sia f una funzione analitica su una regione G, non identicamente nulla. Se $z_0 \in G$ e $f(z_0) = 0$, allora esiste un intero $m \geq 1$ tale che z_0 è uno zero di molteplicità m per f. In particolare, m è il più piccolo intero positivo tale che $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.

(TEO7) (Teo: teorema sui punti di accumulazione degli zeri). Sia G una regione in $\mathbb{C}$ e $f : G \mapsto \mathbb{C}$ analitica. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1) f è identicamente nulla su G
(2) esiste $z_0 \in G$ tale che $f^{(n)}(z_0) = 0$ per ogni $n = 0, 1, 2, \ldots$
(3) l'insieme $\{z \in G : f(z) = 0\}$ ha un punto limite (di accumulazione) in G.

(TEO8) (Cor: due funzioni analitiche che coincidono su un insieme con un punto limite). Siano f e g due funzioni analitiche su una regione G del piano complesso, e sia A l'insieme degli $z \in G$ tali che $f(z) = g(z)$. Allora, se A ha un punto limite in G, si ha $f = g$ su tutto G.

(TEO9) (Molteplicità degli zeri di alcune funzioni elementari). Siano $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0$. Allora:

(a) La funzione $f(z) = e^{az}$ non ha zeri.
(b) La funzione $f(z) = e^{az} + b$ ha infiniti zeri semplici (di molteplicità 1) se $b \neq 0$.
(c) La funzione $f(z) = \sin(az) + b$ ha infiniti zeri. Se $b \neq \pm 1$ gli zeri sono semplici. Se $b = \pm 1$ gli zeri sono doppi.
(d) Quanto affermato al punto precedente è valido anche per le funzioni $\cos(az) + b$, $\cosh(az) + b$.
(e) La funzione $f(z) = \sinh(az) + b$ ha infiniti zeri. Se $b \neq \pm i$ gli zeri sono semplici. Se $b = \pm i$ gli zeri sono doppi.

12 Teorema di Cauchy e formula integrale di Cauchy

(TC1) (Def: cammini omotopi). Sia G aperto in $\mathbb{C}$, $\gamma_0 : [0,1] \mapsto G$ e $\gamma_1 : [0,1] \mapsto G$ due cammini da a a b. Si dice che γ_0 e γ_1 sono *omotopi in* G e scrivo $\gamma_0 \overset{G}{\sim} \gamma_1$ se esiste $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \mapsto G$ continua tale che

(a) $\Gamma(0,t) = \gamma_0(t)$ per ogni $t \in [0,1]$
(b) $\Gamma(1,t) = \gamma_1(t)$ per ogni $t \in [0,1]$
(c) $\Gamma(s,0) = a$ e $\Gamma(s,1) = b$ per ogni $s \in [0,1]$

(TC2) (Teo: indipendenza dell'integrale dal cammino). Sia f una funzione analitica su un aperto G e siano γ_0 e γ_1 due cammini RAT, la cui traccia è contenuta in G. Se γ_0 e γ_1 sono omotopi in G, allora

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f\,.$$

(TC3) (Def: cammino omotopo a zero). Un cammino è detto *omotopo a zero* se è omotopo ad un cammino costante (notare che un cammino omotopo a zero è banalmente chiuso).

(TC4) (Teo: Teorema di Cauchy). Sia f una funzione analitica su un aperto G e sia γ un cammino RAT, la cui traccia è contenuta in G. Se γ è omotopo a zero in G, allora

$$\int_\gamma f = 0\,.$$

(TC5) (Def: insieme semplicemente connesso). Un sottoinsieme G di $\mathbb{C}$ (o, più in generale, un spazio topologico) è detto *semplicemente connesso* se è connesso e ogni cammino chiuso in G è omotopo a zero in G.

(TC6) (Cor: teorema di Cauchy per semplicemente connessi). Sia f una funzione analitica su un aperto G semplicemente connesso e sia γ un cammino chiuso, RAT, la cui traccia è contenuta in G. Allora

$$\int_\gamma f = 0\,.$$

(TC7) (Teo: Esistenza primitiva). Sia G aperto, semplicemente connesso e $f : G \mapsto \mathbb{C}$ analitica. Allora esiste una primitiva F di f su G.

(TC8) (Teo Morera). Sia G una regione in $\mathbb{C}$, $f : G \mapsto \mathbb{C}$ continua e supponiamo che valga $\int_T f = 0$ per ogni cammino chiuso triangolare tale che $\{T\} \subset G$. Allora f è analitica.

(TC9) (Def: indice di un cammino rispetto a un punto). Se $\gamma : [0,1] \mapsto \mathbb{C}$ è un cammino chiuso, RAT e $z \in \mathbb{C}\backslash\{\gamma\}$, *l'indice* di γ rispetto a z è definito come

$$n(\gamma, z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w-z}$$

(TC10) (Proprietà dell'indice). Propretà dell'indice

(a) $n(\gamma^{-1}, z) = -n(\gamma, z)$.
(b) $n(\gamma \cdot \sigma, z) = n(\gamma, z) + n(\sigma, z)$.
(c) Se $\gamma_1 \overset{\mathbb{C}\setminus\{z\}}{\sim} \gamma_2$ allora $n(\gamma_1, z) = n(\gamma_2, z)$.

(TC11) (Prop: Proprietà dell'indice/2). Sia $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ un cammino chiuso RAT e sia

$$f(z) = n(\gamma, z) \qquad z \in G := \mathbb{C}\setminus\{\gamma\}\,.$$

Allora

(1) f è costante su ciascuna componente connessa di G
(2) $f(z) = 0$ se z appartiene alla componente illimitata di G.

(TC12) (Teo: rappresentazione integrale di Cauchy). Sia G una regione in $\mathbb{C}$, $f : G \mapsto \mathbb{C}$ analitica. Se γ è un cammino chiuso, RAT, tale che $\gamma \overset{G}{\sim} 0$, allora

$$n(\gamma, z)\, f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)\, dw}{w - z} \qquad \forall z \in G\setminus\{\gamma\}\,.$$

(TC13) (Teo: rappresentazione integrale per le derivate). Sotto le stesse ipotesi del punto (TC12), si ha

$$n(\gamma, z)\, f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)\, dw}{(w - z)^{n+1}} \qquad \forall z \in G\setminus\{\gamma\}\,.$$

13 Serie di Laurent

(LAU1) (Espansione in fratti semplici). Siano $p(z)$ e $q(z)$ due polinomi su $\mathbb{C}$ tali che il grado di p sia inferiore al grado di q. Se

$$q(z) = c(z - a_1)^{m_1} \cdots (z - a_s)^{m_s}\,,$$

allora si può scrivere

$$\begin{aligned}\frac{p(z)}{q(z)} &= \frac{A_{1,1}}{(z-a_1)} + \frac{A_{1,2}}{(z-a_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1,m_1}}{(z-a_1)^{m_1}} \\ &+ \frac{A_{2,1}}{(z-a_2)} + \frac{A_{2,2}}{(z-a_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2,m_2}}{(z-a_2)^{m_2}} \\ &+ \cdots \\ &+ \frac{A_{s,1}}{(z-a_s)} + \frac{A_{s,2}}{(z-a_s)^2} + \cdots + \frac{A_{s,m_s}}{(z-a_s)^{m_s}}\end{aligned}$$

in cui $A_{i,j}$ sono opportune costanti (complesse). Esempio:

$$\begin{aligned}\frac{3z^2 + 2z - 5}{(z^2+4)^2\,(z-5)^3} &= \frac{3z^2 + 2z - 5}{(z+2i)^2\,(z-2i)^2\,(z-5)^3} \\ = \frac{A}{(z+2i)} &+ \frac{B}{(z+2i)^2} + \frac{C}{(z-2i)} + \frac{B}{(z-2i)^2} \\ + \frac{E}{(z-5)} &+ \frac{F}{(z-5)^2} + \frac{E}{(z-5)^3}\end{aligned}$$

(LAU2) Sviluppo in serie di Taylor/Laurent di $\frac{1}{a-z}$

$$\frac{1}{a-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(a-z_0)^{n+1}} \qquad \text{se } |z-z_0| < |a-z_0|$$
$$\frac{1}{a-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} = -\sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(a-z_0)^{n+1}} \qquad \text{se } |z-z_0| > |a-z_0|$$

(LAU3) Sviluppo in serie di Taylor/Laurent di $\frac{1}{a+z}$

$$\frac{1}{a+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-z_0)^n}{(a+z_0)^{n+1}} \qquad \text{se } |z-z_0| < |a+z_0|$$
$$\frac{1}{a+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(a+z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} = \sum_{n=-1}^{-\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-z_0)^n}{(a+z_0)^{n+1}} \quad \text{se } |z-z_0| > |a+z_0|$$

(LAU4) (Notazione).

$$\mathrm{An}_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-z_0| < R\}$$
$$\dot{B}_R(z_0) = \mathrm{An}_{0,R}(z_0) = B_R(z_0) \backslash \{z_0\}$$

(LAU5) (Def: singolarità isolata). Sia G aperto in $\mathbb{C}$ e sia $f : G \to \mathbb{C}$ analitica. Si dice che la funzione f ha una *singolarità isolata* nel punto $a \in \mathbb{C}$ se esiste $R > 0$ tale che f è analitica in $\dot{B}_R(a)$.

(LAU6) (Def: serie di Laurent). Una *serie di Laurent* (SdL) è una serie di funzioni del tipo

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$
$$= \cdots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1 (z-z_0) + a_2 (z-z_0)^2 + \cdots$$

(LAU7) Sviluppo di una funzione razionale in serie di Laurent.

(LAU8) Sviluppo con centro in una singolarità isolata. Sviluppo *nell'intorno* di una singolarità isolata.

(LAU9) (Teorema: sviluppo in serie di Laurent). Sia f analitica su $\mathrm{An}_{r,R}(z_0)$ in cui r, R soddifano $0 \le r < R \le \infty$. Allora:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad z \in \mathrm{An}_{r,R}(z_0)$$

con

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=\rho} \frac{f(w)\, dw}{(w-z_0)^{n+1}} \qquad r < \rho < R$$

(LAU10) (Def: parte singolare della SdL). Sia

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

lo sviluppo in serie di Laurent di una funzione analitica f nell'intorno di una singolarità isolata z_0 di f. La *parte singolare della serie di Laurent* è definita come la serie delle potenze negative, vale a dire

$$\begin{aligned}\text{parte singolare} &= \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z - z_0)^n \\ &= \cdots + \frac{a_{-3}}{(z - z_0)^3} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)}\end{aligned}$$

(LAU11) (Def: classificazione delle singolarità). Sia z_0 una singolarità isolata di f e sia

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n \qquad\qquad z \in \dot{B}_R(z_0)$$

lo sviluppo di Laurent di f *nell'intorno di* z_0. La singolarità è detta

(a) *eliminabile*, se la parte singolare della SdL è assente
(b) *un polo di ordine* n, se la parte singolare della SdL contiene un numero finito di termini e si ha

$$a_{-n} \neq 0 \qquad\qquad a_k = 0 \text{ per ogni } k < -n.$$

(c) *essenziale* se la parte singolare della SdL contiene infiniti termini.

(LAU12) (Prop: relazione fra zeri e singolarità).

(1) se $f(z)$ ha uno zero di molteplicità m in z_0, e $g(z)$ ha uno zero di molteplicità n in z_0, allora:
   (a) se $m \geq n$, f/g ha una singolarità eliminabile in z_0.
   (b) se $m < n$, f/g ha un polo di ordine $n - m$ in z_0.
(2) se f ha una singolarità essenziale in z_0, e g è analitica in z_0 o ha una singolarità eliminabile in z_0 o ha un polo in z_0, allora $f \pm g$, fg e f/g hanno una singolarità essenziale in z_0.

14 Residui

(RES1) (Def: residuo). Sia f una funzione analitica su $\dot{B}_R(z_0)$ e sia

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad z \in \dot{B}_R(z_0)$$

il suo sviluppo in serie di Laurent *nell'intorno della singolarità* z_0. Il *residuo* di f in z_0 è definito come

$$\operatorname{Res}(f, z_0) := a_{-1}\,.$$

(RES2) (Teorema dei residui). Sia f analitica in $G\backslash\{z_1,\dots,z_m\}$, in cui $z_1,\dots,z_m$ sono singolarità isolate di f. Sia γ un cammino chiuso, regolare a tratti tale che $\{\gamma\}\cap\{z_1,\dots,z_m\}=\emptyset$ e $\gamma \overset{G}{\sim} 0$. Allora:

$$\int_\gamma f = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} n(\gamma, z_k)\ \mathrm{Res}(f, z_k)\,.$$

(RES3) (Formula per i poli). Se f ha un polo di ordine n in z_0, allora

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0} D^{n-1}[(z-z_0)^n f(z)]$$

(RES4) *Metodo di calcolo:* Sia

$$f(z) = \frac{(g_1(z))^{m_1}\,(g_2(z))^{m_2}\,\cdots(g_s(z))^{m_s}}{(g_{s+1}(z))^{m_{s+1}}\,(g_{s+2}(z))^{m_{s+2}}\,\cdots(g_t(z))^{m_t}}$$

in cui le g_i sono funzioni analitiche in $\dot{B}_R(z_0)$ tali che

$$g_i(z) = \mathcal{O}((z-z_0)^{k_i}) \qquad \text{per } z\to z_0\,.$$

Supponiamo che f abbia un polo di ordine n in z_0. Allo scopo di calcolare la parte singolare della SdL di f nell'intorno di z_0 è necessario sviluppare ciascuna g_i fino all'ordine k_i+n-1 incluso, vale a dire

$$g_i(z) = \underbrace{c_{k_i}z^{k_i} + c_{k_i+1}z^{k_i+1} + \cdots + c_{k_i+n-1}z^{k_i+n-1}}_{n \text{ termini}} + \underline{\mathcal{O}}((z-z_0)^{k_i+n})$$

Caso particolare: se f ha un polo semplice ($n=1$), è sufficiente sostituire $g_i(z)$ con il primo termine non nullo del suo sviluppo di Taylor.

(RES5) *Caso particolare del caso particolare:* Se $f(z)=g(z)/h(z)$ in cui g e h sono analitiche, con $g(z_0)\neq 0$, $h(z_0)=0$, $h'(z_0)\neq 0$, allora f ha un polo di ordine 1 in z_0 e si ha

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}\,.$$

(RES6) Se

$$f(z) = \frac{p(z)}{(z-z_0)^m}$$

in cui p è un polinomio di grado $k\le m-2$, allora $\mathrm{Res}(f,z_0)=0$.

(RES7) (Def: Residuo all'infinito). Sia f una funzione analitica su $\mathrm{An}_{R,\infty}(0)$. Si definisce *residuo all'infinito di f* la quantità

$$\mathrm{Res}(f,\infty) := -\,\mathrm{Res}\Big(\frac{1}{z^2}\,f(1/z), 0\Big)\,.$$

(RES8) (Teo: Residuo all'infinito). Sia f una funzione analitica su $\mathrm{An}_{R,\infty}(0)$ e sia γ un cammino chiuso, RAT, tale che $\{\gamma\} \subset \mathrm{An}_{R,\infty}(0)$. Allora

(1)

$$\int_\gamma f = -2\pi i\, n(\gamma, 0)\ \mathrm{Res}(f, \infty)\,.$$

(2) Se f ha solo singolarità isolate nei punti $z_1, \ldots, z_s$, allora

$$\sum_{k=1}^{s} \mathrm{Res}(f, z_k) + \mathrm{Res}(f, \infty) = 0\,.$$

(3) Se $\lim_{z\to\infty} z f(z) = 0$, allora $\int_\gamma f = 0$.

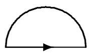
15 Tecniche di integrazione

15.1. Notazione (circonferenza e archi di circonferenza)

$$\begin{aligned}
C_R(t) &= Re^{it} && t \in [0, 2\pi] \\
C_{R,\alpha,\beta}(t) &= Re^{it} && t \in [\alpha, \beta] \\
C_R^+ &= Re^{it} && t \in [0, \pi] \\
C_R^- &= Re^{-it} && t \in [0, \pi]
\end{aligned}$$

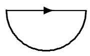
15.2. Notazione

$$\int f \ := \ \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f \qquad\qquad \gamma_R := [-R, R] \cdot C_R^+$$



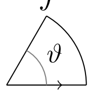
15.3. Notazione (attenzione questo cammino "gira" in senso orario).

$$\int f \ := \ \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f \qquad\qquad \gamma_R = [-R, R] \cdot C_R^-$$



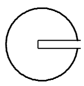
15.4. Notazione (cammino a fetta di torta), vedi figura 7

$$\int f \ := \ \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f \qquad\qquad \gamma_R := [0, R] \cdot C_{R,0,\vartheta} \cdot [Re^{i\vartheta}, 0]$$



15.5. Notazione (cammino Pacman)

$$\int f \ := \ \lim_{R\to+\infty} \lim_{r\to0^+} \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_{\Gamma_{R,r,\varepsilon}} f$$



in cui $\Gamma_{R,r,\varepsilon}$ è il cammino mostrato in figura 8.

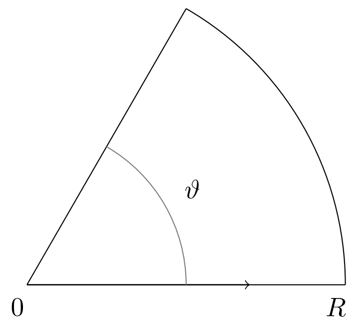


Figura 7: Il cammino a fetta di torta

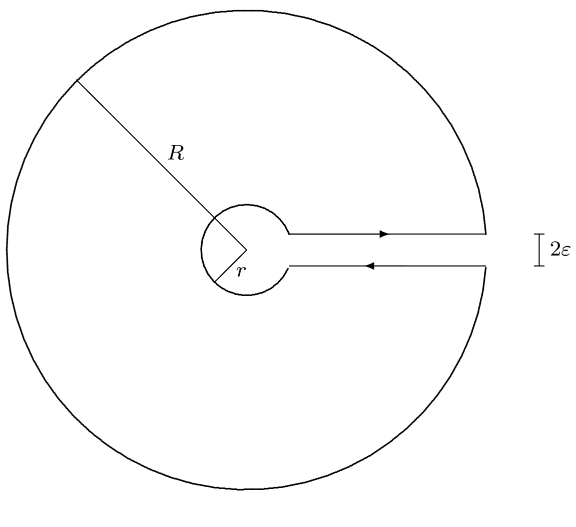


Figura 8: Il cammino Pacman $\Gamma_{R,r,\varepsilon}$

(TEC1) Ipotesi (H1): esiste $R_0 > 0$ tale che f è continua su $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R_0\} \cup \mathbb{R}$. Inoltre $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$

(TEC2) Ipotesi (H2): esiste $R_0 > 0$ tale che f è continua su $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R_0\} \cup \mathbb{R}$. Inoltre $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$.

(TEC3) (Proposizione). Se vale (H1), allora

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f = 0 \qquad\qquad \gamma_R = C_R,\ C_R^+,\ C_R^-,\ \ldots$$

(TEC4) (Tecnica di integrazione TI1). Se vale (H1), si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int f(z)\,dz = \int f(z)\,dz$$

(TEC5) Se esiste $R_0 > 0$ tale che f è continua su $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R_0\}$ allora

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f = 0 \qquad \text{se } \lim_{z\to\infty} |z\,f(z)| = 0$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R^+} f(z)\,e^{i\lambda z} = 0 \qquad \text{se } \lim_{z\to\infty} |f(z)| = 0 \text{ e } \lambda > 0$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R^-} f(z)\,e^{i\lambda z} = 0 \qquad \text{se } \lim_{z\to\infty} |f(z)| = 0 \text{ e } \lambda < 0$$

(TEC6) Esempi di funzioni analitiche (A) o continue (C) su $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R_0\}$ (per un R_0 opportuno) tali che $\lim_{z\to\infty} |zf(z)| = 0$ (nel seguito p e q sono polinomi)

$\dfrac{p(z)}{q(z)}$	se $\deg q \geq \deg p + 2$	A
$e^{-\|z\|}$		C
$\sin^2(1/z)$		A
$1 - \cos(1/z)$		A

(TEC7) Esempi di funzioni per i quali NON vale $\lim_{z\to\infty} |zf(z)| = 0$

e^{-z^2}	diverge lungo l'asse immaginario
$\dfrac{\sin(z)}{z^2}$	diverge lungo l'asse immaginario

Osservazione: una funzione intera (non identicamente nulla) non ha alcuna speranza di soddisfare la condizione $\lim_{z\to\infty} |f(z)| = 0$, (nè tantomeno la condizione $\lim_{z\to\infty} |zf(z)| = 0$ che è più forte), in quanto se questa condizione fosse soddisfatta, si otterrebbe che f è limitata e dunque, per il teorema di Liouville, f è costante.

(TEC8) (Tecnica di integrazione TI2). Se f è pari e vale (H1)

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int f(z)\,dz = \frac{1}{2}\int f(z)\,dz$$

(TEC9) (Tecnica di integrazione TI3). Se $f(z) = g(z^k)$ con $k = 2, 3, 4, \ldots$ e vale (H1), allora

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \frac{1}{1 - e^{i2\pi/k}}\int f(z)\,dz$$

Ad esempio, se $k = 2, 3, 4, \ldots$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^k + 1} = \frac{1}{1 - e^{i2\pi/k}}\int \frac{dz}{z^k + 1} = \frac{\pi/k}{\sin(\pi/k)} \qquad \vartheta = \frac{2\pi}{k}$$

(TEC10) (Lemma). Se $a > 0$

$$\int_0^{\pi/2} e^{-a\sin t}\,dt \le \frac{\pi}{2a}\,.$$

(TEC11) (Lemma di Jordan). Se f soddisfa (H2), allora

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R^+} f(z)\,e^{i\lambda z} = 0 \qquad \text{se } \lambda > 0$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R^-} f(z)\,e^{i\lambda z} = 0 \qquad \text{se } \lambda < 0$$

(TEC12) (Tecnica di integrazione TI4). Se f soddisfa (H2), allora

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,e^{i\lambda x}\,dx = \int f(z)\,e^{i\lambda z}\,dz \qquad \lambda > 0$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,e^{i\lambda x}\,dx = \int f(z)\,e^{i\lambda z}\,dz \qquad \lambda < 0$$

(TEC13) (Tecnica di integrazione TI5). Se f soddisfa (H2)

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\cos(\lambda x)\,dx = \mathrm{Re}\Big[\int f(z)\,e^{i\lambda z}\,dz\Big] \qquad \lambda > 0$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\sin(\lambda x)\,dx = \mathrm{Im}\Big[\int f(z)\,e^{i\lambda z}\,dz\Big] \qquad \lambda > 0$$

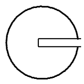
(TEC14) Dimostrazione di $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$.

(TEC15) (Ipotesi H3). Sia $f = gh$ e supponiamo che

(1) g analitica con singolarità isolate che non si trovano su $\mathbb{R}_+$.
(2) h analitica con un taglio lungo $\mathbb{R}_+$.
(3) $\lim_{z\to\infty}\big(zf(z)\big) = 0$.
(4) $\lim_{z\to 0}\big(zf(z)\big) = 0$.

(TEC16) (Tecnica di integrazione TI6). Sia $f = gh$ e supponiamo che valga (H3). Allora

$$\int_0^\infty g(x)\,\Delta h(x)\,dx = \int g(z)\,h(z)\,dz$$



in cui $\Delta h(x)$ è la discontinuità di h quando si attraversa il semiasse reale positivo, vale a dire

$$\Delta h(x) := \lim_{e\to 0^+} \left[h(x+i\varepsilon) - h(x-i\varepsilon)\right] .$$

(TEC17) Osservazione

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0^+} \log_+(x+i\varepsilon) = \log x \\
&\lim_{\varepsilon\to 0^+} \log_+(x-i\varepsilon) = \log x + 2\pi i \\
&\lim_{\varepsilon\to 0^+} [(x+i\varepsilon)^\alpha]^+ = x^\alpha \\
&\lim_{\varepsilon\to 0^+} [(x-i\varepsilon)^\alpha]^+ = x^\alpha e^{i2\pi\alpha}
\end{aligned}$$

(TEC18) Alcuni esempi:

$$\begin{array}{lll}
h(z) = \log_+(z) & \Delta h(x) = -2\pi i & \\
h(z) = (\log_+(z))^2 & \Delta h(x) = -4\pi i \log x + 4\pi^2 & \\
h(z) = (\log_+(z))^2 - 2\pi i \log_+ z & \Delta h(x) = -4\pi i \log x & \\
h(z) = \dfrac{i}{4\pi}(\log_+(z))^2 + \dfrac{1}{2}\log_+ z & \Delta h(x) = \log x & \\
h(z) = [z^\alpha]^{(+)} & \Delta h(x) = x^\alpha \left(1 - e^{2\pi i\alpha}\right) & \alpha > -1
\end{array}$$

Di conseguenza

$$\int_0^\infty g(x)\,dx = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\ominus} g(z)\,\log_+ z\,dz$$

$$\int_0^\infty x^\alpha\, g(x)\,dx = \frac{1}{1-e^{2\pi i\alpha}}\int_{\ominus} g(z)\,[z^\alpha]^{(+)}\,dz \qquad \alpha > -1$$

$$\int_0^\infty g(x)\,\log x\,dx = \int_{\ominus} g(z)\,h(z)\,dz \qquad\qquad h(z) = \frac{i}{4\pi}(\log_+(z))^2 + \frac{1}{2}\log_+ z$$

(TEC19) Sia $r(z) = p(z)/q(z)$ una funzione razionale tale che $\deg(q) - \deg(p) = s \geq 2$ e siano $z_1, z_2, \ldots, z_n$ gli zeri di $q(z)$. Supponiamo che $z_k \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$ per ogni $k = 1, \ldots, n$. Grazie ai punti (TEC16) e (TEC18), si ottengono, ad esempio, le seguenti formule di integrazione

$$\int_0^\infty r(x)\,dx = \frac{i}{2\pi}\int_{\ominus} r(z)\log_+ z\,dz = -\sum_{k=1}^n \mathrm{Res}\left(r(z)\log_+ z, z_k\right)$$

$$\int_0^\infty r(x)\,x^\alpha\,dx = \frac{1}{(1-e^{i2\pi\alpha})}\int_{\ominus} r(z)[z^\alpha]^{(+)}\,dz \qquad [\,\alpha \in (-1, s-1)\,]$$

$$= -\frac{\pi\,e^{-i\pi\alpha}}{\sin(\pi\alpha)}\sum_{k=1}^n \mathrm{Res}\left(r(z)\,[z^\alpha]^{(+)}, z_k\right)$$

$$\int_0^\infty r(x)\,\log x\,dx = \int_{\ominus}\left[r(z)\,\left(\frac{i}{4\pi}(\log_+(z))^2 + \frac{1}{2}\log_+ z\right)\right]dz$$

$$= \sum_{k=1}^n \mathrm{Res}\left[r(z)\,\left(-\frac{1}{2}(\log_+(z))^2 + \pi i\,\log_+ z\right)\,,\, z_k\right]$$

16 Spazi metrici

In questa sezione, solo punti contrassegnati con $\star$

(SM1) $\star$ (Def: spazio metrico).

(SM2) $\star$ (Def: insieme aperto, insieme chiuso). Sia (X, d) uno spazio metrico. Un sottoinsieme $A \subset X$ è detto *aperto in X* se per ogni $x \in A$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \subset A$. Un sottoinsieme $B \subset X$ è detto *chiuso in X* se il suo complemento $B^c = X\backslash B$ è aperto.

(SM3) (Prop: unioni e intersezioni di aperti e chiusi). Proprietà dell'unione e dell'intersezione di una collezione finita o infinita di insiemi aperti o chiusi.

(SM4) $\star$ (Def: successione convergente. Con gli ε). Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $x \in X$. Una successione $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ di elementi di X si dice *convergente ad* x se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \text{ intero positivo tale che } \forall k \geq N \text{ si ha } d(x_k, x) < \varepsilon.$$

(SM5) $\star$ (Def: successione di Cauchy). Sia (X, d) uno spazio metrico. Una successione $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ di elementi di X si dice *di Cauchy* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero positivo N tale che per ogni $k, n \geq N$ si ha $d(x_k, x_n) < \varepsilon$.

(SM6) (Def: punto di aderenza). Sia (X, d) uno spazio metrico e sia A un sottoinsieme di X. Un punto $x \in X$ si dice *punto di aderenza di* A se esiste una successione $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ di elementi di A tale che $x_k \to x$.

(SM7) $\star$ (Def: punto di accumulazione). Sia (X, d) uno spazio metrico e sia A un sottoinsieme di X. Un punto $x \in X$ si dice *punto di accumulazione (o punto limite) di* A se esiste una successione $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ di elementi di A tale che $x_k \neq x$ e $x_k \to x$.

(SM8) (Es: punto di aderenza, ma non di accumulazione). Sia $X = \mathbb{R}$ e $A = (0, 1) \cup \{2\}$. Allora il punto 2 è un punto di aderenza di A, ma non è un punto di accumulazione. I punti 0 e 1 sono sia punti di aderenza che punti di accumulazione.

(SM9) (Def: chiusura di un insieme). $\overline{A} := \{x \in X : x \text{ è un punto di aderenza di } A\}$.

(SM10) (Def: parte interna di un insieme). $A^\circ := \{x \in A : \exists \varepsilon > 0,\ B_\varepsilon(x) \subset A\}$.

(SM11) $\star$ (Prop: Caratterizzazione di un insieme chiuso tramite successioni convergenti). A è chiuso in (X, d) se e solo se se vale l'implicazione

$$(\ x_n \in A \text{ e } x_n \to x \in X\ ) \ \Rightarrow \ x \in A$$

(vale a dire A contiene tutti i suoi punti di aderenza).

(SM12) $\star$ (Def: densità). Sia (X, d) uno spazio metrico e siano A e B due sottoinsiemi di X. L'insieme A si dice *denso in* B se $\bar{A} \supset B$.

(SM13) $\star$ (Condizione equivalente alla densità. Con gli ε). A è denso in B se e solo se $\forall x \in B$ e $\forall \varepsilon > 0$ esiste $y \in A$ tale che $d(x, y) < \varepsilon$.

(SM14) (Condizione equivalente alla densità. Con le successioni convergenti). A è denso in B se e solo se $\forall x \in B$ esiste una successione $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ di elementi di A tale che $x_n \to x$.

(SM15) $\star$ (Def: completezza). Uno spazio metrico (X, d) si dice *completo* se ogni successione di Cauchy è convergente in X.

(SM16) (Prop: completezza per sottoinsiemi di uno spazio metrico completo). Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $Y \subset X$. Lo spazio metrico (Y, d) è completo se e solo se Y è chiuso in X.

(SM17) $\star$ (Def: funzione continua. Con le successioni). Siano (X, d) e (Y, ρ) due spazi metrici. Una funzione $f : X \mapsto Y$ si dice *continua* se vale l'implicazione

$$x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)\,.$$

(SM18) (Def: funzione continua. Con gli ε). Siano (X, d) e (Y, ρ) due spazi metrici. Una funzione $f : X \mapsto Y$ si dice *continua* se per ogni $x \in X$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $d(y, x) < \delta$ allora $\rho(f(y), f(x)) < \varepsilon$

(SM19) $\star$ Def: funzione uniformemente continua fra due spazi metrici.

(SM20) Def: funzione Lipschitz fra due spazi metrici.

(SM21) $\star$ Def: convergenza puntuale ed uniforme per una successione di funzioni $f_n : X \to Y$.

(SM22) $\star$ (Teo: limite di funzioni continue è continuo). Se una successione di funzioni continue $f_n : X \to Y$ converge uniformemente alla funzione $f : X \to Y$, allora f è continua.

(SM23) (Teo: Test M di Weierstrass). Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $f_n : X \to \mathbb{C}$ una successione di funzioni tali che

(a) $|f_n(x)| \leq M_n$ per ogni $x \in X$
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$.

Allora le serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ è uniformemente convergente.

17 Spazi vettoriali normati

In questa sezione, solo punti contrassegnati con $\star$

(SV1) $\star$ (Definizione di spazio vettoriale).

(SV2) (Prop). Un sottoinsieme W di uno spazio vettoriale V è uno spazio vettoriale se e solo se è chiuso rispetto alla somma e alla moltiplicazione per gli scalari, vale a dire se e solo se valgono le implicazioni

$$u, v \in W \Rightarrow u + v \in W \qquad\qquad v \in W,\ \alpha \in \mathbb{F} \Rightarrow \alpha v \in W\,.$$

(SV3) $\star$ (Definizione di norma in uno spazio vettoriale).

(SV4) $\star$ (Distanza associata ad una norma). Se $\|\cdot\|$ è una norma nullo spazio vettoriale V, allora $d(v, w) := \|v - w\|$ è una distanza.

(SV5) (Disuguaglianza di Hölder per le successioni e per la funzioni). Per ogni $p \geq 1$ e q tale che $1/p + 1/q = 1$ si ha:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i\, y_i| \leq \Big[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\Big]^{1/p} \Big[\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q\Big]^{1/q}$$
$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)g(x)|\, dx \leq \Big[\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\, dx\Big]^{1/p} \Big[\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^q\, dx\Big]^{1/q}$$

(SV6) (Disuguaglianza di Minkowski per le successioni e per la funzioni). Per ogni $p \geq 1$ si ha:

$$\left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p\right]^{1/p} \leq \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p\right]^{1/p}$$
$$\left[\int_{\mathbb{R}} |f(x) + g(x)|^p \, dx\right]^{1/p} \leq \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx\right]^{1/p} + \left[\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^p \, dx\right]^{1/p}$$

(SV7) (Def: spazi di successioni). Definizione di ℓ_∞, ℓ_0, ℓ_p, ℓ_f.

(SV8) $\star$ (Def: spazi di funzioni). Definizione di $C_b(\mathbb{R})$, $C_0(\mathbb{R})$, $C_p(\mathbb{R})$, $C_c(\mathbb{R})$, $C^m(\mathbb{R})$.

(SV9) $\star$ (Def: norma p per successioni e funzioni).

$$\|x\|_p := \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right]^{1/p} \qquad \|f\|_p := \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx\right]^{1/p} \qquad p \geq 1$$

(SV10) $\star$ (Def: norma uniforme per le funzioni). $\|f\|_u := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

(SV11) (Inclusioni fra i vari spazi).

$$\begin{aligned}
&\ell_f \subset \ell_p \subset \ell_0 \subset \ell_\infty \subset \mathbb{R}^\infty \\
&C_c(\mathbb{R}) \subset C_0(\mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R}) \\
&C_c(\mathbb{R}) \subset C_p(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R}) \\
&C_p(\mathbb{R}) \not\subset C_b(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

(SV12) (Def). Una successione di successioni $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ si dice *convergente puntualmente* alla successione x se converge ad x componente per componente, cioè se

$$\text{per ogni } k \in \mathbb{N}^* \text{ si ha } \lim_{n \to \infty} x_k^{(n)} = x_k \, .$$

(SV13) (Distanza associata alla convergenza puntuale). Si definisca, per $x, y \in \mathbb{R}^\infty$,

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|} \, .$$

Allora

(1) d è una distanza su $\mathbb{R}^\infty$.
(2) La successione $(x^{(n)})$ di elementi di $\mathbb{R}^\infty$ converge puntualmente $x \in \mathbb{R}^\infty$ se e solo se $d(x^{(n)}, x) \to 0$.

(SV14) $\star$ (Def). Insiemi di vettori $(u_\alpha)_{\alpha \in I}$ linearmente dipendenti o indipendenti.

(SV15) (Def). Dimensione di uno spazio vettoriale.

(SV16) ⋆ (Def: sottospazio generato). Il *sottospazio generato* da un insieme di vettori $(u_\alpha)_{\alpha\in I}$ nello spazio vettoriale V si denota con $\mathrm{span}\{u_\alpha : \alpha \in I\}$ ed è definito come l'insieme di tutti i vettori che possono essere espressi come *combinazione lineare finita* degli u_α, vale a dire quei vattori u che si possono scrivere come

$$u = c_1 u_{\alpha_1} + \cdots + c_n u_{\alpha_n} \qquad n \in \mathbb{N},\ \alpha_i \in I$$

(SV17) (Esempio di sottospazio generato). Sia

$$e^{(k)} := (\,0\,,\,0\,,\,\ldots\,,\,0\,,\underset{(k)}{1}\,,\,0\,,\,0\,,\,\ldots\,)$$

Allora $\mathrm{span}\{(e^{(k)})_{k=1}^{\infty}\} = \ell_f$.

(SV18) (Def: insieme completo di vettori). Un insieme di vettori $(u_\alpha)_{\alpha\in I}$ in uno spazio vettoriale normato $(V, \|\cdot\|)$ è detto *completo* se $\mathrm{span}\{u_\alpha : \alpha \in I\}$ è denso in V, vale a dire se

$$\overline{\mathrm{span}\{u_\alpha : \alpha \in I\}} = V\,.$$

(SV19) ⋆ (Condizione equivalente alla completezza per un sistema di vettori. Con gli ε). Un insieme di vettori (u_α) è completo in V se e solo se vale la seguente condizione: per ogni $v \in V$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una combinazione lineare finita degli u_α

$$u = c_1 u_{\alpha_1} + \cdots + c_n u_{\alpha_n}$$

tale che $\|u - v\| < \varepsilon$.

(SV20) (Def). Base di uno SVN.

(SV21) (Prop). Nello spazio vettoriale normato $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ valgono le identità

$$\overline{\ell_f} = \ell_0 \qquad\qquad \overline{\ell_0} = \ell_0\,.$$

(SV22) ⋆ (Def). Uno *spazio di Banach* è uno spazio vettoriale normato completo.

(SV23) Esempi di spazi di Banach ($p \geq 1$):

$$(\ell_\infty\,, \|\cdot\|_\infty) \qquad (\ell_0\,, \|\cdot\|_\infty) \qquad (\ell_p\,, \|\cdot\|_p)$$
$$(C_b(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u) \qquad (C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$$

(SV24) Esempi di SVN non completi ($p \geq 1$):

$$(\ell_p\,, \|\cdot\|_\infty) \qquad (\ell_f\,, \|\cdot\|_\infty) \qquad (\ell_f\,, \|\cdot\|_p)$$
$$(C_p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p) \qquad (C_p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u) \qquad (C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u) \qquad (C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$$

(SV25) ⋆ (Def). Un insieme X è detto *numerabile* se esiste una corrispondenza biunivoca fra X e $\mathbb{N}$.

(SV26) (Prop). (a) Il prodotto cartesiano di due insiemi numerabili è numerabile. (b) Un unione numerabile di insiemi finiti o numerabili è numerabile, vale a dire se A_1, A_2, A_3, …sono numerabili allora la loro unione $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ è anch'essa numerabile.

(SV27) $\star$ (Prop). Sia $X = \{0,1\}^\infty$ l'insieme di tutte le successioni di zeri e uni. X non è numerabile.

(SV28) (Prop). $\mathbb{R}$ non è numerabile.

(SV29) $\star$ (Def: spazio metrico separabile). Uno spazio metrico (X, d) è detto *separabile* se esiste un insieme numerabile $Y \subset X$ tale che Y è denso in X.

18 Spazi di Hilbert

In questa sezione, solo punti contrassegnati con $\star$

In questa sezione $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ è uno spazio euclideo.

(SH1) $\star$ (Def: definizione di prodotto scalare nel caso reale o complesso).

(SH2) $\star$ (Prop: disuguaglianza di Cauchy–Schwarz).

(SH3) $\star$ (Come ottenere una norma a partire da un prodotto scalare). Se $v \in V$, definisco $\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$.

(SH4) (Continuità del prodotto scalare). Se (u_n) e (v_n) sono 2 successioni in V ed esistono i limiti $\lim_{n\to\infty} u_n = u \in V$ e $\lim_{n\to\infty} v_n = v \in V$, allora, per ogni vettore $w \in V$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \langle u_n, w\rangle = \langle \lim_{n\to\infty} u_n, w\rangle = \langle u, w\rangle$$
$$\lim_{n\to\infty} \langle u_n, v_n\rangle = \langle \lim_{n\to\infty} u_n, \lim_{n\to\infty} v_n\rangle = \langle u, v\rangle$$

(SH5) $\star$ (Spazi euclidei pesati). Sia $\mu : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una funzione continua e positiva. Allora posso definire lo spazio

$$C_2(\mathbb{R}, \mu\, dx) = \left\{ f \in C(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, \mu(x)\, dx < \infty \right\}$$

Questo è uno spazio vettoriale sul quale posso definire il prodotto scalare

$$\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)\, g(x)\, \mu(x)\, dx\,.$$

(SH6) (Def: complemento ortogonale di un insieme di vettori).

(SH7) (Proprietà del complemento ortogonale).

(a) $X^\perp$ è un sottospazio chiuso

(b) se $X \subset Y$ allora $X^\perp \supset Y^\perp$

(c) $X^\perp = \overline{X}^\perp = \big(\mathrm{span}(X)\big)^\perp = \big(\overline{\mathrm{span}(X)}\big)^\perp$.

(SH8) (Esempio: un sottospazio W di ℓ_2 tale che $W \neq \ell_2$, ma $W^\perp = \{0\}$).

(SH9) $\star$ (Def: sistema ortogonale, ortonormale).

(SH10) $\star$ (Def: base ortogonale, ortonormale).

(SH11) $\star$ (Procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt).

(SH12) $\star$ (Condizioni per l'esistenza di una base ortogonale in uno spazio euclideo).

(SH13) (Prop: i coefficienti di Fourier sono ottimali). Sia $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ un sistema ortonormale in V e sia $v \in V$. Poniamo

$$c_k := \langle v, u_k \rangle \qquad S_n := \sum_{k=1}^{n} c_k\, u_k \qquad S_n^{\alpha} := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, u_k\,.$$

in cui $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ sono dei coefficienti arbitrari. Allora $\|v - S_n\| \leq \|v - S_n^{\alpha}\|$.

(SH14) (Prop: disuguaglianza di Bessel). Sia $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ un sistema ortonormale in V e sia $v \in V$. Se $c_k := \langle v, u_k \rangle$ sono i coefficienti di Fourier di v rispetto al sistema ortonormale $(u_k)_{k=1}^{\infty}$, allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|v\|^2\,.$$

(SH15) (Equivalenza fra l'uguaglianza di Parseval e la possibilità di scrivere un vettore v come combinazione lineare infinita di un sistema ortonormale).

(SH16) $\star$ (Prop: un vettore è una combinazione lineare infinita dei vattori di base). Se $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ è una base ortonormale dello spazio euclideo V, allora per ogni $v \in V$ si ha $v = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, u_k$ in cui i c_k sono i coefficienti di Fourier di v, vale a dire $c_k = \langle v, u_k \rangle$.

(SH17) (Teorema sull'esistenza e l'unicità della proiezione ortogonale su un sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert separabile).

(SH18) (Caratterizzazione della proiezione ortogonale). Se W è un sottospazio chiuso dello spazio di Hilbert V, allora la proiezione ortogonale di un vettore $v \in V$ sul sottospazio W è univocamente definita dalle due condizioni: (1) $\pi_W v \in W$ e (2) $(v - \pi_W v) \in W^{\perp}$.

(SH19) (Prop: doppio complemento ortogonale). Se W è un sottospazio dello spazio di Hilbert V, allora si ha $(W^{\perp})^{\perp} = \overline{W}$.

(SH20) $\star$ (Polinomi di Hermite)

(a) Def: $H_n(x) := (-1)^n\, e^{x^2}\, D^n\big(e^{-x^2}\big)$
(b) Formula di ricorrenza: $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$.
(c) Equazione differenziale: $H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$.
(d) Ortogonalità: $\int_{\mathbb{R}} H_n(x)\, H_m(x)\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi}\, 2^n\, n!\, \delta_{n,m}$.
(e) Funzioni di Hermite: $\psi_n(x) := A_n\, e^{-x^2/2} H_n(x)$ in cui $A_n = (\sqrt{\pi}\, 2^n\, n!)^{-1/2}$.
(f) Le funzioni di Hermite $(\psi_n)_{n=0}^{\infty}$ sono una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare canonico) negli spazi $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $C_2(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$.
(g) ψ_n soddisfa *l'equazione di Schrödinger* dell'oscillatore armonico, data da (accatagliati a parte)

$$\Big[-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2}{2}\Big]\psi_n(x) = \lambda\, \psi_n(x)\,. \qquad \text{con } \lambda = n + \frac{1}{2}.$$

19 Operatori lineari

Questa sezione non è in programma

(OL1) (Def: operatore lineare).

(OL2) (Def: norma di un operatore limitato). Siano V e Z due spazi vettoriali normati. Se T è un operatore lineare limitato da V in Z, la *norma* di T è definita come

$$\|T\| := \sup_{x \in V : \|x\|_V \le 1} \|Tx\|_Z = \sup_{x \ne 0} \frac{\|Tx\|_Z}{\|x\|_V} .$$

(OL3) (Prop: equivalenza fra limitatezza e continuità di un operatore lineare).

(OL4) (Def: nucleo e immagine di un operatore lineare. $\operatorname{Ker} T$, $\operatorname{Ran} T$).

(OL5) (Prop: properietà di nucleo e immagine). Sia $T \in \mathcal{L}(V, Z)$. Allora: (1) Il nucleo di T è un sottospazio chiuso di V. (2). L'immagine di T è un sottospazio di Z.

(OL6) (Caso finito dimensionale: matrice associata ad un operatore lineare T). Se $T \in \mathcal{L}(V, Z)$, $(e^{(i)})_{i=1}^n$ è una base di V e $(\tilde{e}^{(i)})_{i=1}^m$ è una base di Z, allora esiste un'unica matrice $m \times n$ A tale che

$$Te^{(k)} = \sum_{i=1}^m \tilde{e}^{(i)} A_{ik}$$

Se Z è uno spazio euclideo e la base $(\tilde{e}^{(i)})_{i=1}^m$ è ortonormale, allora si ha

$$A_{ik} := \langle Te^{(k)}, \tilde{e}^{(i)} \rangle .$$

(OL7) (Azione della matrice associata ad un operatore lineare T sulle componenti). Se $v = \sum_{i=1}^n v_i \, e^{(i)}$ e $w = Tv = \sum_{i=1}^m w_i \, \tilde{e}^{(i)}$, allora

$$w_i = (Tv)_i = \sum_{k=1}^n A_{ik} v_k$$

(OL8) (Def: operatori con nucleo integrale). Se V è uno spazio vettoriale di funzioni e T è un operatore lineare su V, si dice che T possiede un nucleo integrale se esiste una funzione $K(\cdot, \cdot)$ tale che

$$(Tf)(x) = \int K(x, y) f(y) \, dy .$$

(OL9) (Def: seminorma). Una *seminorma* su uno spazio vettoriale V è un'applicazione $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$ tale che

(a) $\|v\| \ge 0$, per ogni $v \in V$
(b) $\|cu\| = |c| \, \|u\|$ per ogni $c \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$, $u \in V$.
(c) $\|u + v\| \le \|u\| + \|v\|$ per ogni $u, v \in V$.

(In altre parole differisce da una norma in quanto si può avere $\|v\| = 0$ con $v \neq 0$).

(OL10) (Def: spazio di Schwartz delle funzioni C^∞ rapidamente decrescenti). Data $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ definisco le seminorme

$$\|f\|_{n,k} := \|x^n\, D^k f\|_u = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^n f^{(k)}(x)| \qquad\qquad n, k \in \mathbb{N}\,.$$

Lo *spazio di Schwartz* o anche *spazio delle funzioni C^∞ rapidamente decrescenti* è definito come

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \left\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \forall n, k \in \mathbb{N},\ \|f\|_{n,k} < \infty\right\}.$$

In altre parole $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ se è C^∞ e se f e tutte le sue derivate vanno a zero all'infinito più velocemente dell'inverso di qualsiasi potenza.

(OL11) (Es: funzioni appartenenti a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$). Esempio: se $p(x)$ è un polinomio allora la funzione $f(x) := p(x)\, e^{-x^2}$ appartiene allo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(OL12) (Def). Se $p \in [1, \infty)$ si denota con $L_p(\mathbb{R})$ (o, più comunemente con $L^p(\mathbb{R})$) il completamento dello spazio vettoriale normato $(C_p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$. Per definizione di completamento $C_p(\mathbb{R})$ è denso in $L_p(\mathbb{R})$.

(OL13) (Teo). $S(\mathbb{R})$ è denso in $C_p(\mathbb{R})$, e quindi anche in $L_p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1, \infty)$.

(OL14) (Disuguaglianza sulla norma del prodotto di operatori). Se $S \in \mathcal{L}(V, W)$ e $T \in \mathcal{L}(W, Z)$ allora

$$\|TS\| \le \|T\|\, \|S\|$$

(OL15) (Def: commutatore). $[S, T] := ST - TS$.

(OL16) (Prop: condizione per la convergenza di una serie di potenze di operatori in uno spazio di Banach).

(OL17) (Prop: condizione per l'esistenza dell'inverso di $(I - A)$ e sua espressione esplicita come serie di potenze).

(OL18) (Def). Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$. La matrice *hermitiana coniugata* (o *aggiunta*) della matrice A si denota con A^* ed è definita come $(A^*)_{ij} = \overline{A}_{ji}$.

(OL19) (Def). Una matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ è detta *hermitiana* (o *autoaggiunta*) se $A^* = A$.

(OL20) (Def). Una matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ è detta *unitaria* se $A^*A = AA^* = I$.

(OL21) (Teorema spettrale finito dimensionale). Se $A \in M_n(\mathbb{C})$ è hermitiana, allora esiste una base ortogonale di $\mathbb{C}^n$ costituita da autovettori di A.

(OL22) (Def: operatore aggiunto di un operatore lineare T).

(OL23) (Def: operatore autoaggiunto).

(OL24) (Prop: proprietà dell'operatore aggiunto).

(OL25) (Prop: relazioni fra il nucleo e l'immagine di T e T^*).

(OL26) (Def: proiezioni ortogonali).

(OL27) (Prop: proprietà delle proiezioni ortogonali).

(OL28) (Def: autovalore, spettro puntuale, spettro continuo, insieme risolvente, risolvente).

(OL29) (Prop: lo spettro è chiuso). Lo spettro di un operatore lineare limitato su uno spazio di Banach è chiuso in $\mathbb{C}$.

(OL30) (Prop: localizzaione dello spettro all'interno di un disco). Se V è uno spazio di Banach e $T \in \mathcal{L}(V)$, allora lo spettro di T è contenuto nel disco chiuso di centro 0 e raggio $\|T\|$.

(OL31) (Prop: proprietà dello spettro degli operatori autoaggiunti).

(OL32) (Prop: condizione sufficiente per $\lambda \in \sigma(T)$). Sia T un operatore lineare sullo spazio di Banach V e sia $\lambda \in \mathbb{C}$. Supponiamo che esista una successione $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ di elementi di V tale che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|Tv_n - \lambda v_n\|}{\|v_n\|} = 0\,.$$

Allora $\lambda \in \sigma(T)$.

(OL33) (Esempio). Come si può usare il criterio del punto precedente per dimostrare che l'insieme $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ fa parte dello spettro continuo di ϑ_- che agisce in ℓ_2: si prendono "autovettori" di norma infinita e si troncano, trasformandoli in "autovettori approssimati" di norma finita.

(OL34) (Operatori di "creazione" e "distruzione"). Supponiamo che gli operatori lineari T ed A soddisfino la relazione di commutazione $[T, A] = \mu A$ per un qualche $\mu \in \mathbb{C}$. Sia $u \neq 0$ un autovettore di T con autovalore λ, vale a dire $Tu = \lambda u$. Allora ci sono 2 possibilità per Au: (1) Au è un autovettore di T con autovalore $\lambda + \mu$, oppure (2) $Au = 0$.

20 Serie di Fourier

(SF1) (Sviluppo in serie di Fourier). Per ogni $f \in L_2[-\pi, \pi]$ si ha

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

in cui

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx\,.$$

Inoltre vale l'identità di Parseval

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[|a_k|^2 + |b_k|^2\right]$$

(SF2) (Sviluppo in serie di Fourier degli esponenziali). Per ogni $f \in L_2[-\pi,\pi]$ si ha

$$f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\, e^{ikx}$$

in cui

$$c_k = \frac{\langle f, e_k\rangle}{\|e_k\|_2^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx\,.$$

(SF3) (Sviluppo in serie di Fourier di soli coseni in $[0,\ell]$). Per ogni $f \in L_2[0,\ell]$ si ha

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)$$

in cui

$$a_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)\, dx$$

(SF4) (Sviluppo in serie di Fourier di soli seni in $[0,\ell]$). Per ogni $f \in L_2[0,\ell]$ si ha

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)$$

in cui

$$b_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)\, dx$$

(SF5) (Def: funzioni DAT). Una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ è detta *differenziabile a tratti* (DAT) se f ed f' sono continue a tratti in $[a,b]$. In altre parole f è differenziabile a tratti in $[a,b]$ se esiste un insieme finito di punti $\alpha_i \in [a,b]$, $i = 0,\ldots,n$ tali che

(a) $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n = b$.
(b) f è differenziabile con derivata continua in ciascun intervallo aperto (α_{i-i}, α_i).
(c) Esistono e sono finiti i limiti

$$\begin{array}{lllll} \lim\limits_{x\to\alpha_0^+} f(x), & \lim\limits_{x\to\alpha_1^-} f(x), & \lim\limits_{x\to\alpha_1^+} f(x), & \ldots, & \lim\limits_{x\to\alpha_n^-} f(x) \\ \lim\limits_{x\to\alpha_0^+} f'(x), & \lim\limits_{x\to\alpha_1^-} f'(x), & \lim\limits_{x\to\alpha_1^+} f'(x), & \ldots, & \lim\limits_{x\to\alpha_n^-} f'(x) \end{array}$$

(SF6) (Teo: convergenza puntuale della serie di Fourier). Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione 2π–periodica continua a tratti e sia S_n la somma parziale n–sima di Fourier di f. Se $x \in \mathbb{R}$ è un punto in cui esistono sia la derivata destra $f'_+(x)$ che quella sinistra $f'_-(x)$ di f, si ha:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f \text{ è continua in } x \\ \frac{1}{2}\left[f(x^+) + f(x^-)\right] & \text{nel caso generale.} \end{cases}$$

(SF7) (Convergenza puntuale della serie di Fourier per le funzioni DAT periodiche). Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione 2π–periodica differenziabile a tratti e sia S_n la somma parziale n–sima di Fourier di f. Allora

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f \text{ è continua in } x \\ \frac{1}{2}\left[f(x^+) + f(x^-)\right] & \text{nel caso generale.} \end{cases}$$

(SF8) (Convergenza puntuale della serie di Fourier per le funzioni DAT definite su $[-\pi, \pi]$). Sia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ una funzione differenziabile a tratti e sia S_n la somma parziale n–sima di Fourier di f. Allora

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } |x| < \pi \text{ e } f \text{ è continua in } x \\ \frac{1}{2}\left[f(x^+) + f(x^-)\right] & \text{se } |x| < \pi \text{ in generale} \\ \frac{1}{2}\left[f(\pi) + f(-\pi)\right] & \text{se } x = \pm\pi. \end{cases}$$

(SF9) (Relazione fra i coefficienti di Fourier di f e quelli di f'). Sia $f \in C[-\pi, \pi]$ con f' continua a tratti. Siano a_k, b_k i coefficienti di Fourier di f e a'_k, b'_k i coefficienti di Fourier di f'. Allora

(20.1) $$a_k = -b'_k/k \qquad b_k = (a'_k + (-1)^{k+1}a'_0)/k \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Se inoltre vale $f(\pi) = f(-\pi)$ si ha

(20.2) $$a_k = -b'_k/k \qquad b_k = a'_k/k \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

(SF10) (Ricetta 1). Sia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ e sia F una primitiva di f. Sia f è CAT, la SdF di F si ottiene nel modo seguente:

(1) integrare la SdF di f termine a termine;
(2) nel termine $a_0x/2$ (se presente), sostituire x con la SdF.

$$x \longrightarrow 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin(kx)}{k}$$

(3) aggiungere $A_0/2$.

(SF11) (Ricetta 2). Sia $f : [-\pi, \pi]$ continua con f' continua a tratti. La SdF di f' si ottiene nel modo seguente:

(1) derivare la SdF di f termine a termine;
(2) aggiungere $\frac{f(\pi)-f(-\pi)}{2\pi}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cos(kx)\right)$.

(SF12) Soluzione dell'equazione del calore in una dimensione nell'intervallo $[0, \ell]$ con condizioni al bordo vario tipo.

21 Trasformata di Fourier

21.1. In questa sezione $L_p(\mathbb{R}) = L_p(\mathbb{R};\mathbb{C})$, vale a dire tutte le funzioni sono *a priori* a valori complessi.

(TF1) Definizione di trasformata di Fourier per funzioni $f \in L_1(\mathbb{R})$.

(TF2) (Teo). Se $f \in L_1(\mathbb{R})$ allora $\mathcal{F}(f) \in C_0(\mathbb{R})$.

(TF3) (Prop: Proprietà elementari della trasformata di Fourier). Siano $f, h \in L_1(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Allora

(1) $\mathcal{F}[\alpha f + \beta h] = \alpha\mathcal{F}[f] + \beta\mathcal{F}[h]$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
(2) $\mathcal{F}[\bar{f}](\lambda) = \overline{\mathcal{F}[f](-\lambda)}$.
(3) Se f è reale $\mathcal{F}[f](\lambda) = \overline{\mathcal{F}[f](-\lambda)}$.
(4) Se f è reale pari $\mathcal{F}[f]$ è reale e pari.
(5) Se f è reale dispari $\mathcal{F}[f]$ è immaginaria pura dispari.

(TF4) (Esempio di traslazioni e dilatazioni di una funzione). Sia γ la funzione gaussiana, data da $\gamma(x) := e^{-x^2}$. Sia γ_1 una gaussiana con picco alto il triplo di γ, largo il doppio e centrato nel punto $x = 9$. Allora

$$\gamma_1(x) = 3\,\gamma\big((x-9)/2\big)\,.$$

(TF5) (Lista di alcune proprietà della TdF. Alcune sono conseguenze di risultati che appaiono successivamente). Sia $f \in L_1(\mathbb{R})$ e sia $\hat{f} := \mathcal{F}[f]$. Allora si ha, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$,

(1) $\mathcal{F}[f(-x)](\lambda) = \hat{f}(-\lambda)$
(2) $\mathcal{F}[f(x-a)](\lambda) = e^{-i\lambda a}\,\hat{f}(\lambda)$
(3) $\mathcal{F}[f(x)\,e^{iax}](\lambda) = \hat{f}(\lambda - a)$
(4) $\mathcal{F}[f(x)\,\cos(ax)](\lambda) = \frac{1}{2}\Big[\hat{f}(\lambda+a) + \hat{f}(\lambda-a)\Big]$
(5) $\mathcal{F}[f(x)\,\sin(ax)](\lambda) = \frac{1}{2i}\Big[\hat{f}(\lambda-a) - \hat{f}(\lambda+a)\Big]$
(6) $\mathcal{F}[f(a\,x)](\lambda) = \frac{1}{|a|}\,\hat{f}(\lambda/a)$ se $a \neq 0$
(7) $\mathcal{F}[f(a\,(x-b))](\lambda) = \frac{1}{|a|}\,e^{-i\lambda b}\,\hat{f}(\lambda/a)$ se $a \neq 0$
(8) $\mathcal{F}[f(a\,x-b)](\lambda) = \frac{1}{|a|}\,e^{-i\lambda(b/a)}\,\hat{f}(\lambda/a)$ se $a \neq 0$.
(9) $\mathcal{F}[D^k f](\lambda) = (i\lambda)^k\,\hat{f}(\lambda)$.
(10) $\mathcal{F}[x^k\,f](\lambda) = i^k\,(D^k\hat{f})(\lambda)$.
(11) $\mathcal{F}[\hat{f}(s)](t) = 2\pi\,f(-t)$.
(12) $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\,\mathcal{F}(g)$

(TF6) (Primo teorema sul legame fra differenziabilità e andamento all'infinito). Sia $f \in C^{p-1}(\mathbb{R})$ con $f^{(p)}$ continua a tratti e assumiamo che le funzioni $f, f', f'', \ldots, f^{(p)}$ appartengano tutte a $L_1(\mathbb{R})$. Allora

(1) per ogni $k = 1, \dots, p$ si ha $\mathcal{F}(f^{(k)})(\lambda) = (i\lambda)^k \mathcal{F}(f)$.
(2) $\hat{f}(\lambda)$ tende a zero, quando $\lambda \to \infty$ più velocemente di $1/\lambda^p$, vale a dire

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^p \hat{f}(\lambda) = 0 .$$

(TF7) (Secondo teorema sul legame fra differenziabilità e andamento all'infinito). Sia $f \in L_1(\mathbb{R})$ tale che le funzioni $xf, x^2 f, \dots, x^q f$ appartengano tutte ad $L_1(\mathbb{R})$. Allora $\hat{f} \in C^q(\mathbb{R})$. Inoltre

$$D^k \hat{f} = \mathcal{F}[(-ix)^k f] \qquad k = 1, \dots, q .$$

(TF8) Definizione dello spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ delle funzioni di Schwartz (o funzioni *rapidamente decrescenti*).

(TF9) (Prop: invarianza di $\mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ sotto l'azione della TdF). Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ allora $\mathcal{F}[f] \in \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

(TF10) (Def: antitrasformata di Fourier). Se $g \in L_1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ si definisce *antitrasformata di Fourier* di g e si indica con $\check{g}$, la funzione

$$\mathcal{F}^a(g)(t) = \check{g}(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(s)\, e^{ist}\, ds \qquad t \in \mathbb{R} .$$

(TF11) (Teorema di inversione). Se $f \in S(\mathbb{R})$ si ha

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}^a \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ \mathcal{F}^a = I \quad \text{vale a dire} \quad \mathcal{F}^a = \mathcal{F}^{-1} \\
&\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F} \circ P = \frac{1}{2\pi} P \circ \mathcal{F} \\
&\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = 2\pi P
\end{aligned}$$

(TF12) (Esempio di utilizzo del teorema di inversione). Sapendo che

$$\mathcal{F}\left[H(s)e^{-\alpha s}\right](t) = \frac{1}{\alpha + it} \qquad \alpha > 0 \tag{21.1}$$

posso ottenere la trasformata di Fourier di $1/(\alpha + it)$ senza doverla calcolare. Infatti, dalla (21.1) si ottiene

$$H(s)e^{-\alpha s} = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\alpha + it}\right](s) .$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[\frac{1}{\alpha + it}\right](s) &= 2\pi\, \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\alpha + it}\right](-s) \\
&= 2\pi\, H(-s)\, e^{\alpha s}
\end{aligned}$$

(TF13) (Teorema di Plancherel) Se $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ e $\langle f, g\rangle$ denota il prodotto scalare canonico, si ha

$$\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \|f\|_2 \qquad\qquad \langle \mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g)\rangle = 2\pi \langle f, g\rangle$$

(TF14) Definizione del prodotto di convoluzione $f * g$.

(TF15) (Prop: proprietà del prodotto di convoluzione).

(a) $f * g = g * f$
(b) $(f * g) * h = f * (g * h) =: f * g * h$.
(c) Se $a \neq 0$ e $\tilde{f}(x) = f(ax)$, $\tilde{g}(x) := g(ax)$, allora $(\tilde{f} * \tilde{g})(x) = \frac{1}{|a|}(f * g)(ax)$

(TF16) (Teo: convoluzione e trasformata di Fourier). Siano $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ limitate. Allora

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\, \mathcal{F}(g)\,.$$

(TF17) (Il principio di indeterminazione di H.) Sia $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tale che $\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2\, dx = 1$. Sia $\varphi(\lambda) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathcal{F}[\psi](\lambda)$. Allora:

(1) $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(\lambda)|^2\, d\lambda = 1$.
(2) Interpretando $|\psi(x)|^2$ e $|\varphi(\lambda)|^2$ come densità di probabilità associate rispettivamente alle variabili x e λ, si ha $\sigma_x\, \sigma_\lambda \geq 1/2$.

22 Distribuzioni

(DIS1) (Def: funzioni localmente integrabili). Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ si dice *localmente integrabile* se:

(a) f ha discontinuità isolate.
(b) per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, si ha che l'integrale (possibilmente improprio) $\int_a^b |f(x)|\, dx$ è finito.

(DIS2) (Def: funzioni continue a tratti). Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ si dice *continua a tratti* se

(a) f ha discontinuità isolate
(b) per ogni punto di discontinuità u, esistono e sono finiti i limiti

$$f(u^-) := \lim_{x \to u^-} f(x) \qquad f(u^+) := \lim_{x \to u^+} f(x)$$

(DIS3) (Prop). Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è continua a tratti allora è localmente integrabile.

(DIS4) (Def). $\mathcal{K} = C_c^\infty(\mathbb{R})$ è l'insieme delle funzioni su $\mathbb{R}$ (a valori reali o complessi a seconda del contesto) infinitamente differenziabili a supporto compatto.

(DIS5) (Def). Convergenza nello spazio $\mathcal{K}$.

(DIS6) (Def). Una *distribuzione su* $\mathcal{K}$ è un funzionale lineare continuo $F : \mathcal{K} \to \mathbb{C}$, vale a dire un funzionale lineare tale che

$$\text{se } f_n \xrightarrow{\mathcal{K}} f \text{ allora } F(f_n) \to F(f).$$

(DIS7) (Prop). Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *localmente integrabile* e sia $\varphi_g : \mathcal{K} \to \mathbb{C}$ definita come

$$\varphi_g(f) := \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x)\, dx \qquad f \in \mathcal{K}\,.$$

Allora φ_g è una distribuzione.

(DIS8) (Def: delta di Dirac). $\delta_{x_0}(f) := f(x_0)$.

(DIS9) (Delta di Dirac nella notazione "impropria").

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \delta(x - x_0)\, dx = f(x_0)\,.$$

(DIS10) (Def: distribuzione theta).

$$\vartheta(f) = \int_0^{\infty} f(x)\, dx\,.$$

(DIS11) (Prop). Sia $h \in C_1(\mathbb{R})$ non negativa, tale che $\int_{\mathbb{R}} h = 1$. Poniamo

$$g_n(x) := n\, h(nx) \qquad x \in \mathbb{R}$$

Allora

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{g_n}(f) := \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x) f(x)\, dx = \delta_0(f) \qquad \forall f \in \mathcal{K}\,.$$

(DIS12) (Esempio: delta di Dirac ottenuta come limite di gaussiane). Scegliendo al punto precedente $h(x) = e^{-x^2}/\sqrt{\pi}$ otteniamo:

$$\delta_0 = \lim_{n\to\infty} \varphi_{g_n} \qquad g_n(x) := \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2}$$

$$\delta_0(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2} \qquad \text{(notazione “impropria”)}$$

(DIS13) Definizione di $P(1/x)$ (parte principale di $1/x$) ed espressione equivalente.

(DIS14) Definizione di $P(1/x^n)$ (parte principale di $1/x^n$)

$$P(1/x^n)(f) := \lim_{K\to+\infty} \int_{-K}^{+K} \frac{1}{x^n} \Big[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \Big]\, dx \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(DIS15) (Def). $\mathcal{K}^*$ è l'insieme delle distribuzioni su $\mathcal{K}$.

(DIS16) (Def). Operazioni sulle distribuzioni: somma, prodotto per uno scalare.

(DIS17) (Def). Se $F \in \mathcal{K}^*$ e $h \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, si definisce $(hF)(f) := F(hf)$ per ogni $f \in \mathcal{K}$.

(DIS18) (Prop). Siano n, m due interi positivi. Allora

$$x^n\, P\left(\frac{1}{x^m}\right) = \begin{cases} x^{n-m} & \text{se } n \geq m \\ P\left(\frac{1}{x^{m-n}}\right) & \text{se } n < m \end{cases}$$

(DIS19) (Esempio). $x^5 P(1/x^3) = x^2$, mentre $x^3 P(1/x^7) = P(1/x^4)$.

(DIS20) (Def: derivata di una distribuzione). $(DF)(f) = F'(f) := -F(f')$ per ogni $f \in \mathcal{K}$.

(DIS21) (Def). Convergenza nello spazio $\mathcal{K}^*$.

(DIS22) (Prop). Ogni distribuzione ha derivate di tutti gli ordini.

(DIS23) (Regola della derivata di un prodotto). Se $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $F \in \mathcal{K}^*$ allora $(hF)' = h'F + hF'$.

(DIS24) (Prop: il limite della derivata è uguale alla derivata del limite). Siano $(F_n)_{n=1}^\infty$ e F distribuzioni. Se $F_n \overset{\mathcal{K}^*}{\to} F$, allora $F_n' \overset{\mathcal{K}^*}{\to} F'$.

(DIS25) (Prop). Derivata (nel senso delle distribuzioni) di una funzione differenziabile a tratti.

(DIS26) (Esempi di applicazione della proposizione precedente).

$$
\begin{aligned}
& D\vartheta = \delta_0 && \vartheta \text{ è la distribuzione di Heaviside} \\
& D\,\mathrm{sgn}(x) = 2\delta_0 && \\
& D\,\mathrm{sgn}(-x) = -2\delta_0 && \\
& D\,\mathrm{sgn}(\sin x) = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\delta_{2k\pi} - \delta_{(2k+1)\pi}\right) && \\
& D\lfloor x \rfloor = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k && \lfloor x \rfloor \text{ denota la } \textit{parte intera} \text{ di } x \\
& D\lfloor x^2 \rfloor = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\delta_{\sqrt{k}} - \delta_{-\sqrt{k}}\right) &&
\end{aligned}
$$

(DIS27) (Formula per la derivata ennesima della delta di Dirac). Se $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ si ha

$$
h(x)\,\delta_a^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} h^{(k)}(a)\,\delta_a^{(n-k)}
$$

(DIS28) (Prop). $D|x-a| = \mathrm{sgn}(x-a)$.

(DIS29) (Prop). Se $g \in C^1(\mathbb{R})$, $D[g(|x|)] = g'(|x|)\,\mathrm{sgn}(x)$.

(DIS30) (Esempio). $De^{-|x|} = -e^{-|x|}\,\mathrm{sgn}(x)$.

(DIS31) (Prop). $D\,\mathrm{sgn}(x-a) = 2\delta_a = 2\delta(x-a)$.

(DIS32) Siano g e h due funzioni differenziabili a tratti, tali che nessun punto di discontinuità di g coincide con un punto di discontinuità di h. Allora si ha

$$
D(gh) = (Dg)\,h + g\,(Dh)\,.
$$

(DIS33) (Prop). $D(\log|x|) = P(1/x)$.

(DIS34) (Prop). $DP(1/x^n) = -nP(1/x^{n+1})$.

(DIS35) (Sviluppo della "funzione composta della delta di Dirac"). Sia $b \in C^1$ e supponiamo che b abbia zeri semplici e isolati nei punti x_1, x_2, x_3, $\ldots$, allora si ha

$$\delta[b(x)] = \sum_k \frac{1}{|b'(x_k)|}\,\delta_{x_k}\,.$$

Di conseguenza

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(b(x))\,dx = \sum_k \frac{f(x_k)}{|b'(x_k)|}\,.$$

Esempio

$$\delta(\cos x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta\left(x - \frac{\pi}{2} - k\pi\right)$$

(DIS36) (QUESTO NO)(Un modo alternativo per associare una distribuzione alla funzione $1/x$ e relazione con la parte principale). Sia $\frac{1}{x-(x_0\pm i0)}$ la distribuzione definita come

$$\frac{1}{x-(x_0\pm i0)}(f) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x-(x_0\pm i\varepsilon)}\,dx$$

Allora vale

$$\frac{1}{x-(x_0\pm i0)} = P\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \pm i\pi\delta_{x_0}$$

(DIS37) (Def). Trasformata di Fourier di una distribuzione: $(\mathcal{F}[\varphi])(f) := \varphi[\mathcal{F}f]$.

(DIS38) La definizione di trasformata di Fourier di una distribuzione obbedisce al "principio guida", vale a dire, se φ è una distribuzione associata ad una funzione ordinaria g, si ha

$$\mathcal{F}(\varphi_g) = \varphi_{\mathcal{F}(g)}$$

(DIS39) Calcolo della trasformata di Fourier di δ_a, e^{iax}, x^n, $P(1/x)$, $\mathrm{sgn}(x)$, $H(x)$.