Modelli e Metodi Matematici della Fisica. E1

Filippo Cesi – 2018–19

Nome	
Cognome	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
test	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (1 pt[1]). Scrivere sul frontespizio nome e cognome in stampatello, nelle apposite caselle. Ripeto, in STAMPATELLO.

(2) (8 pt). Calcolare il raggio di convergenza

$$(a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} n^2(3-3i)^n\, z^n \qquad\qquad (b)\quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{in}\, z^n\,.$$

Risp: (a) $1/(3\sqrt{2})$. (b) 1.

(3) (8 pt). Sia $z = i\sqrt{3}+1$. Usando il ramo principale, calcolare le seguenti espressioni (il risultato deve essere un numero palesemente reale!)

$$(a)\quad |(-i)^z| \qquad\qquad (b)\quad \operatorname{Re}(z^i)$$

Risp: (a) $e^{\pi\sqrt{3}/2}$. (b) $e^{-\pi/3}\cos(\log 2)$.

(4) (7 pt). Trovare la parte singolare dello sviluppo in serie di Laurent in $z = 0$ di

$$f(z) = \frac{z+3z^2}{(e^z-1)^2\,\sin(z)}\,.$$

Risp: $1/z^2 + 2/z$.

(5) (7 pt). Determinare le singolarità isolate, la loro natura, e, per i poli, trovare l'ordine.

$$f(z) = \frac{e^{\cos z}(z^2-3z-10)}{(z-1)^2\,\sin^2(\pi z)}$$

Risp: $z = 1$ polo 4, $z = -2$ polo 1, $z = 5$ polo 1, $z \in \mathbb{Z}\backslash\{1,-2,5\}$ polo 2.

(6) (8 pt). Calcolare l'integrale

$$\int_{|z-i/2|=1} \frac{z+6}{z(e^{2\pi z}-1)}\,dz\,.$$

Schema di soluzione. Sia

$$f(z) = \frac{z+6}{z(e^{2\pi z}-1)}\,.$$

La funzione f ha le seguenti singolarità isolate

$$\begin{aligned} &z_0 = 0 &&\text{polo di ordine 2}\\ &z_k = ik,\ k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\} &&\text{polo di ordine 1}\end{aligned}$$

Le singolarità interne al cammino di integrazione sono $z_0 = 0$ e $z_1 = i$. Si calcola facilmente

$$\operatorname{Res}(f,0) = \frac{1-6\pi}{2\pi} \qquad\qquad \operatorname{Res}(f,i) = \frac{6+i}{2\pi i}\,.$$

Quindi

$$\int_{|z-i/2|=1} f(z)\,dz = 2\pi i\left[\operatorname{Res}(f,0)+\operatorname{Res}(f,i)\right]$$

$$= 2\pi i\left[\frac{1-6\pi}{2\pi}+\frac{6+i}{2\pi i}\right] = 6 + i(2-6\pi)\,.$$

[1] 1 pt = 0.5 trentesimi

(7) (8 pt). Enunciare e dimostrare il teorema sull'esistenza della primitiva di una funzione analitica (la versione più generale che conoscete).

(8) (7 pt). Sia f una funzione analitica sul piano complesso ad eccezione di un numero finito di singolarità isolate nei punti $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Supponiamo che nessuno dei punti z_k coincida con l'origine e sia

$$\alpha := \min_{k=1,\ldots,n} |z_k| > 0 \, .$$

Sapendo che che $f^{(3)}(0) = 1 + i$ e che $|f(z)| \leq 4|z|$ per ogni z tale che $|z - z_k| \geq \alpha/2$ per ogni $k = 1, \ldots, n$, cosa si può affermare su α?