Modelli e Metodi Matematici della Fisica. E2

Filippo Cesi – 2018–19

Nome	
Cognome	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
test	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (8 pt[1]). Calcolare

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+4x+16}\,dx\,.$$

Risp: $\frac{2^{2/3}\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)$.

(2) (8 pt). Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato (a e b sono 2 numeri reali)

$$(a)\quad D^3\big((a+bx)\,e^{-x^2}\delta_0''\big) \qquad\qquad (b)\quad D^2(\cos x\,e^{-|x|})+2\delta_0\,.$$

Risp: (a) $-2a\delta_0^{(3)}-2b\delta_0^{(4)}+a\delta_0^{(5)}$. (b) $2e^{-|x|}\sin|x|$.

(3) (7 pt). Consideriamo lo sviluppo in serie di Fourier in $[-\pi,\pi]$ della funzione $f(x)=H(x)\,e^{-x}$, in cui H è la funzione a gradino di Heaviside

$$H(x)\,e^{-x}\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\right]\qquad x\in[-\pi,\pi]\,.$$

Calcolare: (a) $\sum_{k=0}^\infty a_{2k+1}$; (b) $\frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{k=1}^\infty\left[|a_k|^2+|b_k|^2\right]$.

Risp: (a) $(1-e^{-\pi})/4$. (b) $(1-e^{-2\pi})/(2\pi)$. Vedi soluzione problema analogo in 17-18/E2.

(4) (8 pt). Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni, riconducendosi, se possibile, a casi noti

$$(a)\quad f(x)=16x^2e^{-4x^2+i4x} \qquad\qquad (b)\quad f(x)=xH(x-2)\,e^{-4x}$$

Risp: (a) $-\dfrac{1}{8}\sqrt{\pi}e^{-\frac{1}{16}(t-4)^2}\left(t^2-8t+8\right)$. (b) $\dfrac{9+i2t}{(4+it)^2}e^{-8-2it}$.

(5) (7 pt). Calcolare il seguente integrale scritto nella notazione "dei fisici", in cui compare la "funzione composta della delta di Dirac", semplificando il più possibile il risultato (fornire, se possibile, una risposta numerica)

$$\int_{-\infty}^{\infty}2^{-|x|}\,\delta\Big(\sin\Big(\frac{\pi x}{4}\Big)\Big)\,dx\,.$$

Soluzione. La funzione $b(x):=\sin(\pi x/4)$ si annulla nei punti

$$x_k=4k\qquad\text{con } k\in\mathbb{Z}\,.$$

Poiché

$$|b'(x_k)|=|\pi/4\,\cos(\pi x_k/4)|=\frac{\pi}{4}$$

si ottiene

$$\delta(\sin(\pi x/4))=\frac{4}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_{4k}\,.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}2^{-|x|}\,\delta(\sin(\pi x/4))\,dx&=\frac{4}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{-|4k|}\\&=\frac{4}{\pi}\left[2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{4k}}-1\right]=\frac{4}{\pi}\left[\frac{2}{1-\frac{1}{16}}-1\right]=\frac{68}{15\pi}\,.\end{aligned}$$

[1] 1 pt = 0.5 trentesimi

(6) (8 pt). Sia $F(x) = H(x)\,e^{-x^2/2}$, in cui H è la funzione a gradino di Heaviside e sia $G = F'' + (1-x^2)F$, nel senso delle distribuzioni.

(a) Calcolare G.

(b) Calcolare $D^n G$ per n intero positivo arbitrario.

Risp: (a) δ_0'. (b) $\delta_0^{(n+1)}$.

(7) (8 pt). Risolvere la seguente equazione del calore nell'intervallo $[0, \ell]$, in cui $f(x)$ è la condizione iniziale nota e $\lambda > 0$:

$$
\begin{aligned}
u_t(x,t) &= \lambda\, u_{xx}(x,t) && x \in [0,\ell]\,, \quad t > 0 \\
u(x,0) &= f(x) && x \in [0,\ell] \\
u_x(0,t) &= u_x(\ell,t) = 0 && t > 0\,.
\end{aligned}
$$