Argomenti

(1) Sia Arg l'argomento principale e $\arg_+ := \arg_{[0,2\pi)}$. Determinare arg, Arg e $\arg_+$

$$(a)\quad z = 3e^{i110\pi/7} \qquad\qquad (b)\quad z = -5e^{i100\pi} \qquad\qquad (c)\quad z = -2e^{i145\pi/11}$$

Risp: (a) $\arg(z) = \frac{110}{7}\pi + 2k\pi = \frac{12}{7}\pi + 2k\pi$, $\mathrm{Arg}(z) = -\frac{2}{7}\pi$. $\arg_+(z) = \frac{12}{7}\pi$.
(b) $\arg(z) = 101\pi + 2k\pi = \pi + 2k\pi$, $\mathrm{Arg}(z) = \pi$. $\arg_+(z) = \pi$.
(c) $\arg(z) = \frac{145}{11}\pi + +\pi + 2k\pi = \frac{2}{11}\pi + 2k\pi$, $\mathrm{Arg}(z) = \frac{2}{11}\pi$. $\arg_+(z) = \frac{2}{11}\pi$.

Serie di potenze

(2) Calcolare il raggio di convergenza

$$(a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} 3^n\, z^n \qquad (b)\quad \sum_{n=0}^{\infty} (2+3i)^n\, z^n \qquad (c)\quad \sum_{n=0}^{\infty} n^4 \left[\frac{1+i}{2+i}\right]^n z^n$$

Risp: (a) 1/3. (b) $1/\sqrt{13}$. (c) $\sqrt{5/2}$.

(3) Calcolare il raggio di convergenza

$$(a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^\alpha} \quad \text{con } \alpha > 0 \qquad (b)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n \qquad (c)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$$

$$(d)\quad \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} z^n \qquad (e)\quad \sum_{n=0}^{\infty} n!\, e^{-n^\alpha} z^n \quad \text{con } \alpha > 1$$

$$(f)\quad \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!} \qquad (g)\quad \sum_{n=0}^{\infty} c^{n^2} z^n \quad \text{con } c \in \mathbb{C} \qquad (h)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^2 z^n$$

$$(i)\quad \sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^{3n}\, z^{2n} \qquad (j)\quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n\, z^{n^2} \qquad (k)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{n^2}}{(n!)^3}\, z^n$$

$$(l)\quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n\, z^{n!} \qquad (m)\quad \sum_{n=0}^{\infty} 3^{n!}\, z^{n!} \qquad (n)\quad \sum_{n=0}^{\infty} e^{(\log n)^4}\, z^n \qquad (o)\quad \sum_{n=0}^{\infty} 3^{(n+1)!}\, z^{n!}$$

$$(p)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^{\sqrt{n}}\, z^n \qquad (q)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (i^n - 2)^n\, z^n \qquad (r)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n$$

$$(s)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \exp(in^2)\, z^n \qquad (t)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^{5n} \qquad (u)\quad \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^4\, e^{-n^2}\, z^n$$

Risp: (a) ∞. (b) $1/e$. (c) 1/4. (d) 1. (e) ∞. (f) 1. (j) 1. (k) 0. (l) 1. (m) 1/3. (n) 1. (o) 0. (p) 1. (q) 1/3. (s) 1. (u) ∞.

(4) Calcolare il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$, in cui

$$a_n := \begin{cases} 3^n & \text{se } n \text{ è pari} \\ 4^n & \text{se } n \text{ è dispari, } n > 1000 \\ 5^n & \text{se } n \text{ è dispari, } n \le 1000 \end{cases}$$

(5) Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$(a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{\sqrt{n}}\, z^n \qquad\qquad (b)\quad \sum_{p\in\mathbb{N}:\ p \text{ primo}} z^p$$

Risp: (a) 1. (b) 1.

(6) Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)^{n/2} z^n$$

Risp: $\sqrt{2}/\sqrt[4]{3}$.

☆ (7) Determinare i valori di z per i quali le seguenti serie sono convergenti

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z}\right)^n \qquad\qquad (b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1+z^{2n}}$$

(Sugg. per (b): Si considerino separatamente i 3 casi: $|z|<1$, $|z|>1$, $|z|=1$).

★ (8) Dimostrare che se $0<\delta<1$ e (a_n) è una successione decrescente di numeri reali positivi tali che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ allora la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformemente in

$$F := \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1, |z-1| \ge \delta\}\,.$$

Suggerimento: sia $f_n(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ e sia $w_n := \sum_{k=0}^{n} z_k$. Usando la formula della "sommatoria per parti" si può scrivere

$$f_n(z) = a_n w_n + \sum_{k=1}^{n} (a_{k-1} - a_k)\, w_{k-1}\,.$$

Poiché $a_n \to 0$ posso trovare N tale che per ogni $n \ge N$ si ha $0 < a_n < \varepsilon$. A questo punto si può dimostrare che f_n è uniformemente di Cauchy e quindi uniformemente convergente in F. Più precisamente si può far vedere che, se $n, m \ge N$ si ha $|f_n(z) - f_m(z)| < 4\varepsilon/\delta$ per ogni $z \in F$.

Mappe

(9) Dato $A \subset \mathbb{C}$ e $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, determinare l'insieme $f(A)$. Disegnare nel piano complesso gli insiemi A e $f(A)$

(a) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1,\ \pi \le \arg z \le 5\pi/4\}$, $f(z) = z^2$.
(b) $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 \le |z| \le 2,\ \pi/2 \le \arg z \le 3\pi/4\}$, $f(z) = z^9$.
(c) A è il cerchio di centro $2i$ e raggio 1. $f(z) = iz + 1$.
☆ (d) A è la retta $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 2\}$. $f(z) = 1/z$.

Risp: (d) Sia C la circonferenza di centro $1/4$ e raggio $1/4$. Allora $f(A) = C \setminus \{0\}$. Sugg: si parametrizzi A come $z = 2 + it$ in cui $t \in \mathbb{R}$. Si scriva $w = 1/z(t) = u + iv$ e si calcoli $u^2 + v^2$.