Funzioni analitiche, funzioni elementari

(1) Dimostrare che

$$(a)\quad D(\sin) = \cos \qquad (b)\quad D(\cos) = -\sin \qquad (c)\quad \sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

(2) Dimostrare che, se $z = x + iy$, si ha

$$(a)\quad \sinh z = -i\sin(iz) \qquad (b)\quad \cosh z = \cos(iz)$$
$$(c)\quad |\sin z|^2 = \frac{1}{2}[\cosh(2y) - \cos(2x)] \qquad (d)\quad |\cos z|^2 = \frac{1}{2}[\cosh(2y) + \cos(2x)]$$

[FE] (3) Se $z = x + iy$, esprimere la parte reale e la parte immaginaria delle seguenti funzioni in termini di funzioni reali di x e y

$$(a)\quad \sin z \qquad (b)\quad \cos z \qquad (c)\quad e^{\cos z} \qquad (d)\quad \tan z \qquad (e)\quad e^{e^z}$$

Risp: (b) $\mathrm{Re}(\cos z) = \cos x \cosh y$. $\mathrm{Im}(\cos z) = -\sin x \sinh y$.
(e) $\mathrm{Re}\big(e^{e^z}\big) = \exp(e^x \cos y)\,\cos(e^x \sin y)$. $\mathrm{Im}\big(e^{e^z}\big) = \exp(e^x \cos y)\,\sin(e^x \sin y)$.

(4) Trovare tutte le suluzioni

$$(a)\quad \sin z = 0 \qquad (b)\quad \cos z = 0 \qquad (c)\quad \cosh z = 0 \qquad (d)\quad \sin z = \frac{4i}{3} \qquad (e)\quad \tan z = \frac{5i}{3}$$

Risp: (a) $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. (c) $z = i(\pi/2 + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. (d) $z = k\pi + i(-1)^k \log 3$, $k \in \mathbb{Z}$. (e) $z = (k + 1/2)\pi + i\log 2$, $k \in \mathbb{Z}$.

(5) Dimostrare che

$$(a)\quad |\cosh z| \le \cosh |z| \qquad (b)\quad |\sinh z| \le \sinh |z|$$

(6) Dimostrare che

$$(a)\quad \sin(u + v) = \sin u \,\cos v + \cos u \,\sin v \qquad (b)\quad \sinh(u + v) = \sinh u \,\cosh v + \cosh u \,\sinh v$$
$$(c)\quad \cosh(2z) - 1 = 2\sinh^2 z \qquad (d)\quad \cosh(2z) + 1 = 2\cosh^2 z$$
$$(e)\quad D(\sinh) = \cosh \qquad (f)\quad D(\cosh) = \sinh$$

(7) Dimostrare che

$$(a)\quad |\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y \qquad (b)\quad |\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$$
$$(c)\quad |\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y = -\sin^2 x + \cosh^2 y$$
$$(d)\quad |\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y = \cosh^2 x - \sin^2 y$$

(Sugg: $\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) = \ldots$)

(8) Dimostrare che

$$(a)\quad \sinh(z + i\pi) = -\sinh z \qquad (b)\quad \cosh(z + i\pi) = -\cosh z$$

(9) Trovare tutte le soluzioni

$$(a)\quad e^z = -1 \qquad (b)\quad e^z = 2 + 2i$$
$$(c)\quad \cosh z = \frac{1}{2} \qquad (d)\quad \sinh z = i \qquad (e)\quad \cosh z = -2$$

Risp: (a) $i(2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. (c) $\pm i(\pi/3 + 2k\pi)$. (d) $i(\pi/2 + 2k\pi)$. (e) $\pm\log(2 + \sqrt{3}) + i(2k + 1)\pi$.

(10) Calcolare (usare il ramo principare di $\sqrt{z}$ e delle potenze con esponente non intero)

$$(a)\ \log(1+i) \quad (b)\ \log(1-i) \quad (c)\ \log_+(1-i) \quad (d)\ \log(-1+i0)$$
$$(e)\ \log(-1-i0) \quad (f)\ \sqrt{i} \quad (g)\ \sqrt{-4+i0} \quad (h)\ \sqrt{-4-i0} \quad (i)\ i^i$$
$$(j)\ (-i)^{1/\pi} \quad (k)\ (1-i)^{4i}$$

Risp: (a) $\log 2/2 + i\pi/4$. (b) $\log 2/2 - i\pi/4$. (c) $\log 2/2 + i7\pi/4$. (d) $i\pi$. (e) $-i\pi$. (i) $e^{-\pi/2}$. (j) $e^{-i/2}$. (k) $\exp[\pi + i2\log 2]$.

(11) Far vedere che, se $z = (-1+i)$, $\log(z^2) \neq 2\log z$

(12) Determinare il dominio di analiticità delle seguenti funzioni

$$(a)\ \frac{z^4+z^3+i}{z^2+i} \quad (b)\ e^{z^2+3} \quad (c)\ \sinh(e^{\cosh z}) \quad (d)\ \log(1-iz) \quad (e)\ \sqrt{z^3-1}$$
$$(f)\ \log(1+z^2) \quad (g)\ \log[(1+z)^2] \quad (h)\ \sqrt{1-z^2} \quad (i)\ z^z \quad (j)\ \log[(\log z)^2]$$

Risp: (d) $\mathbb{C}\backslash\{-is : s \geq 1\}$. (f) $\mathbb{C}\backslash\{\pm is : s \geq 1\}$. (j) $\mathbb{C}\backslash(\{z \leq 0\} \cup \{|z| = 1\})$.

(13) Data la funzione f e l'insieme $A \subset \mathbb{C}$, determinare e disegnare su 2 grafici separati, gli insiemi A e $f(A)$

(a) $f(z) = e^z$ $\quad A =$ asse x $\qquad$ (b) $f(z) = e^z$ $\quad A =$ asse y

(c) $f(z) = e^z$ $\quad A = \{\mathrm{Im}\, z = \pi\}$ $\qquad$ (d) $f(z) = e^z$ $\quad A = \{\mathrm{Re}\, z = -1\}$

(e) $f(z) = \log z$ $\quad A = \mathbb{C}\backslash\{z \leq 0\}$ $\qquad$ (f) $f(z) = \log z$ $\quad A = \{|z| = 1,\ z \neq -1\}$

(g) $f(z) = \sqrt{z}$ $\quad A = \mathbb{C}\backslash\{z \leq 0\}$ $\qquad$ (h) $f(z) = \sqrt{z}$ $\quad A = \{-\pi/3 \leq \mathrm{Arg}\, z \leq \pi/2\}$

Risp: (a) $f(A) = (0, \infty)$. (c) $f(A) = \{z = x : x < 0\}$. (d) $f(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1/e\}$. (f) $f(A) = \{z = iy : |y| < \pi\}$.

(14) Per quali valori di z la seguente serie è convergente?

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nz}$$

Varie

[FE] (15) Sia $z = i\sqrt{3} - 1$. Usando il ramo principale, calcolare le seguenti espressioni (il risultato deve essere un numero palesemente reale!)

$$(a)\ \mathrm{Re}(z^{10}) \qquad (b)\ |(-i)^z| \qquad (c)\ \mathrm{Arg}(z^i)$$

Risp: (a) $-2^9 = -512$. (b) $e^{\pi\sqrt{3}/2}$. (c) $\log 2$.

(16) Sia $z = \sqrt{3} - i$. Usando il ramo principale, calcolare le seguenti espressioni (il risultato deve essere un numero palesemente reale!)

$$(a)\ \mathrm{Im}(z^{10}) \qquad (b)\ |(1-i)^z| \qquad (c)\ \mathrm{Re}(z^{-i})$$

Risp: (a) $2^9\sqrt{3}$. (b) $\exp[\frac{1}{2}\sqrt{3}\log 2 - \pi/4]$. (c) $e^{-\pi/6}\cos\log 2$.

11-12/S2 (17) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $z^i = 1 + i$ (usare il ramo principale per definire la potenza). Quante di queste soluzioni appartengono all'insieme $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq e^{10\pi}\}$?

11-12/S3 (18) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione (usare il ramo principale per definire la potenza)

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^z = -2\,.$$

Disegnare sul piano complesso le soluzioni che si trovano all'interno del quadrato di lato 50 centrato nell'origine. Quante sono queste ultime?