Argomenti

(1) ε è una quantità *positiva* che tende a zero. Per ciascuna dei seguenti numeri complessi z determinare le quantità indicate. Arg è l'argomento principale, arg l'argomento generico (a molti valori) e $\arg_+ := \arg_{(0,2\pi)}$. La risposta può essere fornita in termini di altre quantità positive che tendono a zero con ε che si possono (ad esempio) denotare con ε', $\bar{\varepsilon}$, ecc. (Spesso conviene trovare la soluzione per via grafica)

$z = \varepsilon + i$	(a) $\arg z$	(b) $\arg_+(1-z)$	(c) $\mathrm{Arg}(1+2z^2)$	(d) $\mathrm{Arg}(2+z^2)$
$z = \varepsilon + i$	(e) $\mathrm{Arg}(z^4)$	(f) $\arg_+(z^4)$	(g) $\mathrm{Arg}(\bar{z})$	(h) $\mathrm{Arg}(1/z)$
$z = 2e^{i(3\pi/5-\varepsilon)}$	(i) $\mathrm{Arg}(1+z^5)$	(j) $\mathrm{Arg}(1-z^5)$	(k) $\mathrm{Arg}(50+z^5)$	(l) $\arg_+(1-z^5)$
$z = 2e^{i(3\pi/5+\varepsilon)}$	(m) $\mathrm{Arg}(1+z^5)$	(n) $\mathrm{Arg}(1-z^5)$	(o) $\mathrm{Arg}(50+z^5)$	(p) $\arg_+(1-z^5)$
$z = 2e^{i(2\pi/3+\varepsilon)}$	(q) $\mathrm{Arg}(1+z^3)$	(r) $\mathrm{Arg}(1-z^3)$	(s) $\arg_+(1+z^3)$	(t) $\arg_+(1-z^3)$

Risp: (a) $\pi/2-\varepsilon'+2k\pi$. (b) $7\pi/4-\varepsilon'$. (c) $\pi-\varepsilon'$. (d) ε'. (e) $-\varepsilon'$. (f) $2\pi-\varepsilon'$. (g) $-(\pi/2-\varepsilon')$. (h) $-(\pi/2-\varepsilon')$. (i) $\pi-\varepsilon'$. (j) $-\varepsilon'$. (k) ε'. (l) $2\pi-\varepsilon'$. (m) $-(\pi-\varepsilon')$. (n) ε'.

(2) Sia $\sqrt[n]{w}$ la radice n-sima di w definita tramite il ramo principale ($\sqrt[n]{w} := |w|^{1/n}\, e^{i/n \,\mathrm{Arg}\, w}$) e e sia $\sqrt[n]{w}^{(+)}$ la radice n-sima di w definita come $\sqrt[n]{w}^{(+)} := |w|^{1/n}\, e^{i/n \arg_+ w}$. Calcolare il limite per $\varepsilon \to 0^+$ delle seguenti espressioni

$f(z) = \sqrt{1+z^2}$	(a) $f(2i+\varepsilon)$	(b) $f(2i-\varepsilon)$	(c) $f(1+i\varepsilon)$	(d) $f(-2i+\varepsilon)$
$f(z) = \sqrt{1+z^2}^{(+)}$	(e) $f(2i+\varepsilon)$	(f) $f(2i-\varepsilon)$	(g) $f(2+i\varepsilon)$	(h) $f(-2i-\varepsilon)$
$f(z) = \sqrt[5]{1+z^3}^{(+)}$	(i) $f(2e^{i(\pi/3-\varepsilon)})$	(j) $f(2e^{i(\pi/3+\varepsilon)})$	(k) $f(2e^{i(2\pi/3-\varepsilon)})$	(l) $f(2e^{i(2\pi/3+\varepsilon)})$
$f(z) = \sqrt[5]{1+z^3}$	(m) $f(2e^{i(\pi/3-\varepsilon)})$	(n) $f(2e^{i(\pi/3+\varepsilon)})$	(o) $f(2e^{i(2\pi/3-\varepsilon)})$	(p) $f(2e^{i(2\pi/3+\varepsilon)})$

Risp: (a) $i\sqrt{3}$. (b) $-i\sqrt{3}$. (c) $\sqrt{2}$. (d) $-i\sqrt{3}$. (e) $i\sqrt{3}$. (f) $i\sqrt{3}$. (g) $\sqrt{5}$. (h) $i\sqrt{3}$. (i) $\sqrt[5]{7}e^{i\pi/5}$. (j) $\sqrt[5]{7}e^{i\pi/5}$. (k) $\sqrt[5]{9}e^{i2\pi/5}$. (k) $\sqrt[5]{9}$.

Condizioni di Cauchy–Riemann, funzioni armoniche

(3) Determinare i valori di $z = x+iy \in \mathbb{C}$ in cui esiste $f'(z)$

$$(a)\quad f(z) = z^2\,\mathrm{Re}\,z \qquad (b)\quad f(z) = x^2+iy^2 \qquad (c)\quad f(z) = z-\bar{z}$$

Risp: (a) $z=0$. (b) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,z = \mathrm{Im}\,z\}$. (c) Mai.

(4) Dimostrare che $f(z) = \bar{z}\exp[\cosh(z^2)]$ non è analitica.

(5) Trovare l'armonica coniugata di

$$(a)\quad u(x,y) = x^3-3x\,y^2 \qquad (b)\quad u(x,y) = e^{-x}\left[(1+x)\cos y + y\sin y\right].$$

(6) Trovare l'armonica coniugata di u

$$(a)\quad u(x,y) := \frac{1+x}{(1+x)^2+y^2} \qquad x\in\mathbb{R},\ y>0$$

$$(b)\quad u(x,y) := e^{-x}\,(x\,\sin y - y\cos y) \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

(7) Trovare un polinomio $P(x,y)$ armonico tale che vale $P(x,y) = 2x^2-1$ sulla circonferenza unitaria.

(8) Trovare un polinomio armonico $P(x,y)$ che contenga il termine x^4.
Risp: $x^4-6x^2y^2+y^4$.

(9) Trovare tutti i polinomi armonici $P(x,y)$ tali che $P(x,y)^2$ è ancora armonico (sono pochi).

Volta la pagina ☞

Sviluppi in serie

(10) Determinare l'ordine di grandezza $\mathcal{O}((z-z_0)^n)$ nel limite $z \to z_0$

$$
\begin{array}{ll}
(a) \;\; z_0 = 0,\; (\sin z)^3 & (b) \;\; z_0 = 0,\; (\cosh z^2 - 1)^2 \\
(c) \;\; z_0 = 0,\; \log(1+z^3) & (d) \;\; z_0 = \pi,\; \sin(z) \\
(e) \;\; z_0 = 0,\; \sin(\pi \exp(z^3)) & (f) \;\; z_0 = 1,\; (\log z)^2 \\
(g) \;\; z_0 = 0,\; \log(\cos z) & (h) \;\; z_0 = \pi,\; \log(1+\sin^2(z)) \\
(i) \;\; z_0 = 0,\; \sin(e^{z^2}) & (j) \;\; z_0 = 0,\; \sin(\pi e^{z^2})
\end{array}
$$

Risp: (a) $\mathcal{O}(z^3)$. (b) $\mathcal{O}(z^8)$. (c) $\mathcal{O}(z^3)$. (d) $\mathcal{O}(z-\pi)$. (e) $\mathcal{O}(z^3)$. (f) $\mathcal{O}(z-1)^2$. (g) $\mathcal{O}(z^2)$. (h) $\mathcal{O}((z-\pi)^2)$. (i) $\mathcal{O}(1)$. (j) $\mathcal{O}(z^2)$.

(11) Calcolare lo sviluppo di Taylor nell'origine fino all'ordine z^4

$$
\begin{array}{ll}
(a) \;\; \dfrac{z \cos z}{1 + \log(1+z^2)} & (b) \;\; \dfrac{e^{z^2} - 1}{3 + \cosh z} \\
(c) \;\; \dfrac{\sin^3 z}{1 - \cosh z} & (d) \;\; \tan z
\end{array}
$$

Risp: (a) $z - 3z^3/2 + \mathcal{O}(z^5)$. (b) $z^2/4 + 3z^4/32 + \mathcal{O}(z^5)$. (c) $-2z + 7z^3/6 + \mathcal{O}(z^5)$. (d) $z + z^3/3 + \mathcal{O}(z^5)$.