Sviluppi in serie

(1) Determinare l'ordine di grandezza $\mathcal{O}((z-z_0)^n)$ nel limite $z \to z_0$

(a) $z_0 = 0,\ \cos\big[\log\big[1 + (\sin z)^2\big]\big] - 1$ $\qquad$ (b) $z_0 = 0,\ \exp(\sin^2 z - z^2) - 1$

(c) $z_0 = \pi/2,\ \cos\log\sin z - 1$ $\qquad$ (d) $z_0 = 0,\ \exp\big[\sin(z^2) - z^2\big] - 1$

(e) $z_0 = 0,\ \tan\big[\log(1+z) - z\big]$ $\qquad$ (f) $z_0 = 4\pi i,\ \cos\big[\sin(e^z - 1)\big] - 1$

Risp: (a) $\mathcal{O}(z^4)$. (b) $\mathcal{O}(z^4)$. (c) $\mathcal{O}((z-\pi/2)^4)$. (d) $\mathcal{O}(z^6)$

(2) Calcolare lo sviluppo di Taylor (nell'origine) fino all'ordine z^3

$$(a)\ \frac{2\cos z}{2+\sin z} \qquad (b)\ \frac{3+z^2}{z+e^z} \qquad (c)\ \frac{\sin z}{e^z-1} \qquad (d)\ \frac{z^2\cos z}{z^2+\log(z+1)}$$

Risp: (a) $1 - z/2 - z^2/4 + 5z^3/24 + \mathcal{O}(z^4)$. (b) $3 - 6z + 23z^2/2 - 41z^3/2 + \mathcal{O}(z^4)$. (c) $1 - \frac{z}{2} - \frac{z^2}{12} + \frac{z^3}{12} + \mathcal{O}\left(z^4\right)$. (d) $z - \frac{z^2}{2} - \frac{7z^3}{12} + \mathcal{O}\left(z^4\right)$.

(3) Scrivere le seguenti funzioni come serie di potenze centrate in 0

$$(a)\ \frac{z(z+a)}{(a-z)^3} \qquad (b)\ \frac{1}{(1+z^2)^2} \qquad (c)\ \frac{1}{(1-z^6)^3} \qquad (d)\ \frac{z}{(z^2+1)\,(z^2-4)}$$

$$(e)\ \frac{1}{(z^2-1)^2\,(z^2+4)} \qquad (f)\ \frac{1}{1+z+z^2}$$

Risp:

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{a^{n+1}} z^n \qquad (b)\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^{2n} \qquad (c)\ \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) z^{6n}$$

$$(d)\ -\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n + \frac{1}{4^{n+1}}\right] z^{2n+1} \qquad (e)\ \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{5} + \frac{(-1)^n}{5\cdot 4^{n+1}} + (n+1)\right] z^{2n}$$

$$(f)\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(z^{3n} - z^{3n+1}\right)$$

☆ (4) (Bernoulli numbers, convenzione $B_1 = -1/2$). Siano date le funzioni

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z} \qquad\qquad g(z) = \frac{z}{e^z - 1}\,.$$

(a) Scrivere lo sviluppo in serie di potenze di f con centro in nell'origine, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ e determinare il raggio di convergenza R_f della serie ottenuta.

(b) Sia $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ lo sviluppo in serie di g nell'origine. Determinare il raggio di convergenza R_g di questa serie.

(c) I *numeri di Bernoulli* B_n sono definiti come $B_n := n!\,b_n$, in modo tale da poter scrivere

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \qquad\qquad |z| < R_g\,.$$

Dimostrare che $B_0 = 1$ e che, per ogni $n \geq 1$, vale

$$B_0 + \binom{n+1}{1} B_1 + \cdots + \binom{n+1}{n} B_n = 0\,.$$

Dopo aver calcolato B_0, si usi la formula precedente per calcolare B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8. Controllare il risultato su www.wikipedia.org alla voce ...

Volta la pagina ☞

Integrali

(5) Scrivere esplicitamente in termini di una parametrizzazione di γ l'integrale $\int_\gamma f(z)\,dz$, nel caso in cui γ è dato da

(a) il triangolo $[0, 1, i, 0]$ percorso in senso antiorario

(b) la circonferenza di centro i e raggio R percorsa 2 volte in senso orario

(c) il quadrato di centro in 0 e lato uguale a 2, percorso in senso antiorario

Risp: (a) $\int_0^1 f(t)\,dt + (i-1)\int_0^1 f((1-t)+it)dt - i\int_0^1 f(it)dt$.

(6) Se γ è la spezzata $[0, 1, 2+i, 5+i, 7+3i, \log i, i^i, 2+i, e^{e^{2-i}}, i]$. Calcolare (senza fare troppi calcoli)

$$\int_\gamma \cos z\,dz\,.$$

(7) Calcolare, usando la definizione,

$$(a)\quad \int_{|z|=1} \overline{z}\,dz \qquad\qquad (b)\quad \int_\gamma \frac{dz}{z} \qquad \gamma = [1-i,\ 1+i,\ -1+i,\ -1-i,\ 1-i]\,.$$

Risp: (b) $2\pi i$.

(8) Dimostrare che, se γ è il quadrato $[1, i, -1, -i, 1]$

$$\left|\int_\gamma \frac{dz}{\overline{z}^4}\right| \leq 16\sqrt{2}$$

Varie

11-12/E1 (9) Data la funzione $f(z) = \log(1+iz^2)$ (ramo principale):

(a) determinare il dominio di analiticità di f e disegnarlo sul piano complesso

(b) calcolare $a_+ := \lim_{\varepsilon\to 0^+} f(1+i+\varepsilon)$ e $a_- := \lim_{\varepsilon\to 0^+} f(1+i-\varepsilon)$.

(10) Trovare l'armonica coniugata alla funzione

$$u(x,y) = e^{x^2-y^2}\cos(2xy)\,.$$

(Sugg: provate ad indovinare quale può essere una funzione analitica f tale che $u = \operatorname{Re} f$)