

Domini, sviluppi, CR, integrali, Bernoulli, Zeri

(DA) (1) Data la funzione $f(z) = \sqrt{2+z^3}$ (ramo principale):

- (a) determinare il dominio di analiticità di f
 (b) calcolare $a_+ := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(2e^{i(\pi/3+\varepsilon)})$ e $a_- := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(2e^{i(\pi/3-\varepsilon)})$.

Risp: (a) $D = \mathbb{C} \setminus X$ in cui $X := \{\rho e^{i\vartheta} : \rho \geq \sqrt[3]{2}, \vartheta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2\}$. (b) $a_{\pm} = \mp i\sqrt{6}$.

☆ (2) Determinare e disegnare sul piano complesso il dominio di analiticità G della funzione

$$f(z) := \frac{1}{2i} \log \frac{1+iz}{1-iz}.$$

Dimostrare che f è un ramo dell'arcotangente, vale a dire che $\tan f(z) = z$ per ogni $z \in G$. (Sugg: $G = \mathbb{C} \setminus A$ in cui $A := \{z \in \mathbb{C} : (1+iz)/(1-iz) = -t, t \geq 0\}$. Risolvendo per z si trova $A = \{is : s \in \mathbb{R}, |s| \geq 1\}$. Ponendo poi $w = (1+iz)/(1-iz)$ non è difficile far vedere che $\tan f(z) = -i \frac{w^{1/2} - w^{-1/2}}{w^{1/2} + w^{-1/2}} = z$).

10-11/E1 (3) Sia X l'insieme delle soluzioni dell'equazione $z^i = 1 + i\sqrt{3}$ (usare il ramo principale per definire la potenza).

- (a) Determinare X .
 (b) Determinare i punti di accumulazione di X in \mathbb{C} (se esistono).
 (c) Quante di queste soluzioni appartengono all'anello $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 100\}$?

Risp: (a) $X = \{z_k : k \in \mathbb{Z}\}$ in cui $z_k := \exp[\pi/3 + 2k\pi - i \log 2]$. (c) 1.

10-11/S1 (4) Sia $z = 1 + i\sqrt{3}$. Calcolare (usare il ramo principale del log)

$$(a) \operatorname{Im}(z^8) \qquad (b) \log(z^8) \qquad (c) |z^z|$$

Risp: (a) $2^7\sqrt{3}$. (b) $8 \log 2 + i2\pi/3$. (c) $e^{-\sqrt{3}\pi/2}$.

(5) Trovare l'armonica coniugata alla funzione

$$u(x, y) := e^{-y}(x \cos x - y \sin x) \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

(6) Determinare l'ordine di grandezza $\mathcal{O}((z - z_0)^n)$ nel limite $z \rightarrow z_0$

- (a) $z_0 = 0, \tan \tan \tan z$ (b) $z_0 = \pi/2, \cos \cos \cos z$
 (c) $z_0 = 0, \cos[\log(1+z) - \sin z] - 1$ (d) $z_0 = 0, \exp \sin z - 1$
 (e) $z_0 = 0, \cos[\log(1+z) + \sin z] - 1$ (f) $z_0 = 0, \log \cos(z^2)$

Risp: (a) $\mathcal{O}(z)$. (b) $\mathcal{O}(1)$. (c) $\mathcal{O}(z^4)$. (d) $\mathcal{O}(z)$. (e) $\mathcal{O}(z^2)$. (f) $\mathcal{O}(z^4)$.

(7) Verificare il seguente sviluppo di Taylor nell'origine fino all'ordine z^3

$$\frac{z e^z}{\cosh z} = z + z^2 + \underline{\mathcal{O}(z^4)}.$$

(8) Calcolare lo sviluppo di Taylor nell'origine fino all'ordine z^4

$$(a) \frac{z + \sin^2 z}{\cos z} \qquad (b) \frac{\sin(z^2) e^z}{2 + \sin z}$$

Risp: (a) $z + z^2 + z^3/2 + z^4/6 + \underline{\mathcal{O}(z^5)}$. (b) $z^2/2 + z^3/4 + z^4/8 + \underline{\mathcal{O}(z^5)}$.

- (9) Sia G una regione in \mathbb{C} e sia $f : G \mapsto \mathbb{C}$ analitica. Dimostrare che se $|f|$ è costante allora f è costante. (Sugg: porre $f = u + iv$ ed usare ...).
- (10) Sia $R_0 > 0$ e f una funzione continua su $G := \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R_0\}$. Se C_R è un arco di circonferenza (o anche un'intera circonferenza) di raggio $R > R_0$ definisco

$$I(R) := \int_{C_R} f.$$

Dimostrare che se $\lim_{|z| \rightarrow \infty} (z f(z)) = 0$, allora $\lim_{R \rightarrow \infty} I(R) = 0$.

- (11) Sia

$$I(R) := \int_{\gamma} \frac{z^4 - 20z^2}{3z^6 + 1} dz \quad \gamma(t) = Re^{it} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Dimostrare che $\lim_{R \rightarrow \infty} I(R) = 0$

- (12) Sia p un polinomio di grado n le cui radici si trovano tutte in $B_R(0)$ con $R > 0$. Dimostrare che

$$\int_{|z|=R} \frac{p'(z)}{p(z)} dz = 2\pi i n.$$

- 10-11/S2 (13) Sia f una funzione analitica sul primo quadrante $G = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$. Sapendo che $|f(z)| \leq \operatorname{Re} z$ per ogni $z \in G$, come posso maggiorare la quantità $|f''(z_0)|$ in cui $z_0 = 15 + 10i$?
- (14) Sia f una funzione analitica sulla semistriscia $G = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Re} z < 22, \operatorname{Im} z > 0\}$. Sapendo che $|f(z)| \leq \operatorname{Im} z$ per ogni $z \in G$, come posso maggiorare la quantità $|f''(z_0)|$ in cui $z_0 = 15 + 10i$?
- (15) Calcolare il raggio di convergenza delle serie di Taylor centrata in 0 (sugg: non è necessario calcolare lo sviluppo in serie)

$$(a) \frac{\cosh(e^{z^5})}{1+z+z^2} \quad (b) \tanh z \quad (c) \frac{e^{z^2}}{1+\sin(2z^3)}$$

Risp: (a) 1. (b) $\pi/2$. (c) $\sqrt[3]{\pi/4}$.

- 12-13/E1 (16) Si considerino gli sviluppi in serie di Taylor della funzione $f(z) = \tan(z^2)$ con centro rispettivamente in 0 e i .

$$(a) \tan(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (b) \tan(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-i)^n.$$

Determinare i raggi di convergenza R_a ed R_b delle serie (a) e (b).

Risp: $R_a = \sqrt{\pi/2}$, $R_b = \sqrt{\pi/2} - 1$.

- (17) Trovare gli zeri con relative molteplicità delle seguenti funzioni

$$\begin{array}{lll} (a) z^3(z+3)^5(z^2+1)^4 & (b) z^7+3 & (c) (z^7+3)^3 \\ (d) e^{2z}+i & (e) 2\sin(z/2)-1 & (f) \sin(z/2)-1 \\ (g) (\sin(z/2)-1)^3 & (h) \sin^2(z)-1 & (i) \cosh z \\ (j) \sin(z^2) & (k) e^{\pi z^2}-1 & \end{array}$$

Risp: (a) 0 molt. 3. -3 molt. 5. $\pm i$ molt. 4. (b) $\sqrt[7]{3} \exp[i(\pi/7 + 2k\pi/7)]$, $k \in \{0, 1, \dots, 6\}$, molt. 1. (g) $\pi(1+4k)$, $k \in \mathbb{Z}$, molt. 6. (h) $\pi(1/2+k)$, $k \in \mathbb{Z}$, molt. 2. (j) 0 molt. 2. $\pm i\sqrt{k\pi}$, $k \in \mathbb{N}^*$, molt. 1. $\pm i\sqrt{k\pi}$, $k \in \mathbb{N}^*$, molt. 1.