Le funzioni Zeta e Gamma

(1) Determinare l'insieme dei valori di z per i quali è possibile definire la funzione zeta di Riemann come serie assolutamente convergente

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

(2) Dimostrare che l'insieme dei valori di z per i quali è possibile definire la "funzione Gamma" come integrale assolutamente convergente

$$\Gamma(z) := \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} \, dt$$

è dato da $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$. [Ricorda che se $f(t)$ è una funzione reale, continua su $[0, A)$ tale che $f(t) \sim t^{\alpha}$ quando $t \to 0^+$, allora l'integrale $\int_0^A |f(t)| \, dt$ è convergente se e solo se $\alpha > -1$].

(3) (Una proprietà della funzione Gamma).

(a) Verificare che (considerando il ramo principale)

$$z^w z^u = z^{w+u} \qquad \forall z \in \mathbb{C} \backslash \{z \le 0\} \quad \forall w, u \in \mathbb{C} .$$

(b) Verificare che se $f(z) := z^w$, allora $f'(z) = w\, z^{w-1}$. Da questo segue che, in particolare

$$\frac{d}{dt} t^z = z\, t^{z-1} \qquad t \in \mathbb{R}_+ \quad z \in \mathbb{C} .$$

(c) Dimostrare che si ha: $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ (se $\operatorname{Re} z > 0$).
(d) Calcolare $\Gamma(n)$ in cui n è un intero positivo.

☆ (4) Sia S_n la sfera unitaria n-dimensionale (vale a dire il bordo di una palla $(n+1)$-dimensionale)

$$S_n := \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

e sia a_n il volume di S_n. Dimostrare che

$$a_{n-1} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} .$$

Utilizzando la proprietà $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, valida per $\operatorname{Re} z > 0$ e sapendo che $\Gamma(1) = 1$ e $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, calcolare esplicitamente a_n per $n = 1, 2, \dots, 5$.

Istruzioni: si calcoli l'integrale $I_n = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left[-(x_1^2 + \cdots + x_n^2)\right] d^n x$ sia in coordinate cartesiane che in coordinate sferiche e si imponga che i due risultati siano uguali. Si osservi che l'elemento di volume $d^n x$, grazie alla simmetria dell'integrando, può essere scritto in coordinate sferiche come $d^n x = a_{n-1}\, r^{n-1} dr$.

Un modo per calcolare $\zeta(2k)$

(1) Siano B_n i numeri di Bernoulli, definiti implicitamente dalla relazione

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \qquad |z| < 2\pi .$$

Verificare che valgono gli sviluppi in serie di Taylor

$$(a) \quad \tan z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!} B_{2n}\, z^{2n-1} \qquad |z| \le \frac{\pi}{2}$$

$$(b) \quad z \cot z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} B_{2n}\, z^{2n} \qquad |z| \le \pi .$$

[Sugg: si dimostri prima (b). Per dimostrare (a) usare l'identità $\tan z = \cot z - 2\cot(2z)$ (da dimostrare).]

Volta la pagina ☞

☆ (2) (Sviluppo in fratti semplici per la cotangente). Dimostrare che

$$\pi\,\cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \qquad\qquad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$$

Istruzioni:

(a) Dato un intero positivo n, si consideri (e si disegni sul piano complesso!) il cammino rettangolare

$$\gamma_n := \left[n + \frac{1}{2} + ni,\ -n - \frac{1}{2} + ni,\ -n - \frac{1}{2} - ni,\ n + \frac{1}{2} - ni,\ n + \frac{1}{2} + ni\right]$$

e sia

$$I_n := \int_{\gamma_n} \frac{\pi\,\cot(\pi w)}{w^2 - z^2}\, dw$$

(b) Ponendo $w = s + it$ e usando le identità

$$|\sin w|^2 = \sin^2 s + \sinh^2 t \qquad\qquad |\cos w|^2 = \cos^2 s + \sinh^2 t$$

si dimostri che, per n abbastanza grande, si ha $|\cot(\pi w)|^2 \leq 2$ per ogni $w \in \{\gamma_n\}$. Da questo segue che $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

(c) Si calcoli poi il valore di I_n usando il teorema dei residui e si imponga la condizione precedentemente ottenuta $I_n \to 0$.

☆ (3) Dimostrare che il valore della funzione zeta di Riemann, quando l'argomento è un intero positivo pari, può essere espresso in funzione dei numeri di Bernoulli tramite la formula

$$\zeta(2k) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k+1} \frac{(2\pi)^{2k}\, B_{2k}}{2\,(2k)!}\ .$$

Calcolare $\zeta(2)$, $\zeta(4)$ e $\zeta(6)$. (Sugg: confrontare lo sviluppo in fratti semplici e lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $f(z) = \pi z \cot(\pi z)$).

Formula di riflessione di Eulero

☆ (4) (Formula di riflessione di Eulero). Dal teorema di fattorizzazione di Weierstrass segue che la funzione seno può essere scritta come un prodotto infinito

$$\sin(\pi z) = z\, e^{g(z)} \prod_{n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n} \ = \ z\, e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \qquad ①$$

in cui g è una opportuna funzione intera. Dimostrare che g è costante e che, più precisamente, vale

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)\ .$$

Ricordando che la funzione Gamma può essere scritta come prodotto infinito

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n}$$

ed usando opportunamente l'identità $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, si dimostri la formula di riflessione di Eulero

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}\ .$$

(Sugg: ricorda che se $f = \prod_i h_i$ allora $f'/f = \sum_i (h_i'/h_i)$. Calcola $f'(z)/f(z)$ per entrambi i membri della ① e confronta il risultato ottenuto con lo sviluppo in fratti semplici della cotangente).