Polinomi di Hermite ed autofunzioni dell'oscillatore armonico quantistico

(1) Sapendo che $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ (come si dimostra?), dimostrare che per ogni intero positivo n si ha

$$I_{2n} := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, x^{2n}\, dx = \sqrt{\pi}\frac{(2n-1)!!}{2^n} \qquad\qquad I_{2n-1} := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, x^{2n-1}\, dx = 0$$

in cui $n!!$ è il prodotto di tutti i naturali minori o uguali a n che hanno la stessa parità di n. Es: $6!! = 2\cdot 4\cdot 6$, $7!! = 3\cdot 5\cdot 7$. Nel caso pari si ha $(2n)!! = 2^n\, n!$. (Sugg: scrivere $e^{-x^2}x^{2n} = \left(e^{-x^2}x\right)\, x^{2n-1}$ e ottenere una relazione di ricorrenza integrando per parti).

(2) (Polinomi di Hermite). Si consideri lo spazio euclideo $C_2(\mathbb{R}, e^{-x^2}dx)$ con prodotto scalare

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\, e^{-x^2}\, dx\,.$$

(a) Ortogonalizzare (senza normalizzare) i polinomi: $1, x, x^2, x^3$, utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt.

(b) Si definiscano i polinomi di Hermite come

$$H_n(x) := (-1)^n\, e^{x^2}\, D^n\left(e^{-x^2}\right)$$

e si dimostri che

$$H_n'(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)\,.$$

(c) Utilizzando l'identità ottenuta al punto precedente, dimostrare per induzione l'identità

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$$

che implica quindi la formula di ricorrenza

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)\,.$$

Dopo aver calcolato H_0 e H_1 a partire dalla definizione, calcolare con la formula di ricorrenza H_2, H_3, H_4, H_5. Verificare che H_0, H_1, H_2 e H_3 coincidono, a parte la normalizzazione, con i polinomi ottenuti al punto (a).

(d) Dimostrare che H_n soddisfa l'equazione differenziale:

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0\,.$$

(e) Osservare che

$$e^{-x^2}H_n(x) = -D(e^{-x^2}H_{n-1}(x)) \qquad ①$$

e dimostrare che

$$\langle H_n,\, H_m\rangle = \sqrt{\pi}\, 2^n\, n!\, \delta_{n,m}\,.$$

In particolare quindi $(H_n)_{n=1}^{\infty}$ è un *sistema ortogonale.*
(Sugg: sia $I_{n,m} := \langle H_n,\, H_m\rangle$. Se $m = 0$ e $n > 0$ (o viceversa), l'ortogonalità segue dalla ①. Se m e n sono entrambi positivi si può integrare per parti usando la ① ottenendo una relazione fra $I_{n,m}$ e $I_{n-1,m-1}$. Questa relazione implica $I_{n,m} = 0$ se $n \neq m$, mentre, se $n = m$ si ottiene, iterando, $I_{n,n} = \sqrt{\pi}\, 2^n\, n!$).

(f) Osservare che, se γ è un cammino chiuso nel piano complesso che gira una volta in senso antiorario attorno al punto x, grazie alla formula integrale di Cauchy posso scrivere

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\, \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{-z^2}}{(z-x)^{n+1}}\, dz\,.$$

Dimostrare quindi che la *funzione generatrice* dei polinomi di Hermite è data da

$$F(t,x) := \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!} = e^{2xt - t^2}\,.$$

(Sugg: scambiare la serie con l'integrale ed usare nuovamente la formula integrale di Cauchy per calcolare l'integrale risultante).

Volta la pagina ☞

(g) Le *funzioni di Hermite* sono definite come

$$\psi_n(x) := A_n\, e^{-x^2/2} H_n(x) \qquad \text{in cui } A_n = (\sqrt{\pi}\, 2^n\, n!)^{-1/2}.$$

Dimostrare che $(\psi_n)_{n=0}^{\infty}$ è un sistema ortonormale nello spazio euclideo $C_2(\mathbb{R})$ (o nel suo completamento $L_2(\mathbb{R})$). Dimostrare che ψ_n soddisfa *l'equazione di Schrödinger* dell'oscillatore armonico, data da (accatagliati a parte)

$$\Big[-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2}{2}\Big]\psi_n(x) = \lambda\, \psi_n(x)\,. \qquad\qquad \text{con } \lambda = n + \frac{1}{2}.$$

Convergenza in L_2 e convergenza puntuale

★ (1) Trovare una successione di funzioni $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ nello spazio di Hilbert $L_2[0,1]$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2 = 0\,,$$

ma $f_n(x)$ non converge puntualmente a zero per alcun $x \in [0,1]$. (Questo dimostra in modo eclatante che la convergenza rispetto alla norma $\|\cdot\|_2$ non implica la convergenza puntuale).