

Serie e trasformate di Fourier/2

(1) Utilizzando un opportuno sviluppo in serie di Fourier, dimostrare che $\zeta(4) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, in cui ζ è la funzione zeta di Riemann.

(2) Sia $f \in L_1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ e sia $\hat{f} := \mathcal{F}[f]$. Dimostrare le seguenti identità, in cui $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(-x)](\lambda) &= \hat{f}(-\lambda) \\ \mathcal{F}[f(x-a)](\lambda) &= e^{-i\lambda a} \hat{f}(\lambda) \\ \mathcal{F}[f(x) e^{iax}](\lambda) &= \hat{f}(\lambda - a) \\ \mathcal{F}[f(x) \cos(ax)](\lambda) &= \frac{1}{2} [\hat{f}(\lambda + a) + \hat{f}(\lambda - a)] \\ \mathcal{F}[f(x) \sin(ax)](\lambda) &= \frac{1}{2i} [\hat{f}(\lambda - a) - \hat{f}(\lambda + a)] \\ \mathcal{F}[f(ax)](\lambda) &= \frac{1}{|a|} \hat{f}(\lambda/a) & a \neq 0 \\ \mathcal{F}[f(a(x-b))](\lambda) &= \frac{1}{|a|} e^{-i\lambda b} \hat{f}(\lambda/a) & a \neq 0 \\ \mathcal{F}[f(ax-b)](\lambda) &= \frac{1}{|a|} e^{-i\lambda(b/a)} \hat{f}(\lambda/a) & a \neq 0\end{aligned}$$

(3) Verificare le seguenti identità (H è la funzione a gradino di Heaviside), valide per $a > 0$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\text{rect}(x)](\lambda) &= \text{sinc}(\lambda/(2\pi)) & \mathcal{F}[\text{tri}(x)](\lambda) &= \text{sinc}^2(\lambda/(2\pi)) \\ \mathcal{F}[I_{[-a,a]}](\lambda) &= \frac{2 \sin(\lambda a)}{\lambda} & \mathcal{F}[e^{-ax} H(x)](\lambda) &= \frac{1}{a + i\lambda} \\ \mathcal{F}[e^{-a|x|}](\lambda) &= \frac{2a}{a^2 + \lambda^2}\end{aligned}$$

(4) Trovare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni (quando è possibile usare opportune trasformazioni per ricondursi al caso di una funzione la cui trasformata di Fourier è nota):

$$\begin{aligned}(a) \quad f(x) &= \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |x| > 1 \end{cases} & (b) \quad f(x) &= \begin{cases} e^x & \text{se } |x| \leq \pi \\ 0 & \text{se } |x| > \pi \end{cases} \\ (c) \quad f(x) &= \begin{cases} \cos x & \text{se } |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{se } |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases} & (d) \quad f(x) &= \begin{cases} \sin x & \text{se } |x| \leq \pi \\ 0 & \text{se } |x| > \pi \end{cases} \\ (e) \quad f(x) &= \begin{cases} e^{|x|} & \text{se } |x| \leq \pi \\ 0 & \text{se } |x| > \pi \end{cases} & (f) \quad f(x) &= e^{-3x} H(2x + 5) \\ (g) \quad f(x) &= \begin{cases} 2(x-3) & \text{se } x \in [3, 5] \\ 2(7-x) & \text{se } x \in [5, 7] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}\end{aligned}$$

Risp: (a) $2 \sin(\lambda)/\lambda$. (c) $-\frac{2}{\lambda^2-1} \cos(\lambda\pi/2)$. (f) $\frac{e^{\frac{5}{2}(3+i\lambda)}}{3+i\lambda}$. (g) $8e^{-i5\lambda} \sin^2(\lambda)/\lambda^2$.

(5) Trovare la trasformata di Fourier delle funzioni

$$(a) \quad f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \qquad (b) \quad f(x) = \frac{1}{x^4 + 1}.$$

(Suggerimento. Utilizzare il teorema dei residui chiudendo il cammino di integrazione nel semipiano inferiore della variabile complessa $z = x + iy$ per $\lambda > 0$, e nel semipiano superiore per $\lambda < 0$).

Risp: (a) $\pi e^{-|\lambda|}$. (b) $\pi e^{-|\lambda|/\sqrt{2}} \sin\left[\frac{|\lambda|}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right]$.

(6) Sia $I_{[-a,a]}$ la funzione caratteristica dell'intervallo $[-a, a]$ con $a > 0$ e sia $f(x) := \cos x I_{[-a,a]}(x)$.

(a) Calcolare la trasformata di Fourier $g = \mathcal{F}[f]$ di f (utilizzare una delle proprietà dimostrate in precedenza).

- (b) Determinare i valori del parametro a per i quali $g(\lambda)$ tende a zero, quando $\lambda \rightarrow \infty$, *più velocemente* di $1/\lambda$ (in realtà come $1/\lambda^2$).
 (c) Spiegare il perché del punto precedente

- (7) Calcolare la trasformata di Fourier della funzione f lineare a tratti, il cui grafico si ottiene collegando con dei segmenti i punti:

$$(-\infty, 0), (0, 0), (1, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 0), (+\infty, 0).$$

(Sugg: scrivere f in termini di una combinazione di “funzioni triangolo” $\text{tri}()$).

- (8) Riconducendosi, se possibile, a casi noti, verificare che

$$(a) \mathcal{F} \left[x^2 e^{-x^2} \right] (\lambda) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} (2 - \lambda^2) e^{-\lambda^2/4}$$

$$(b) \mathcal{F} \left[\frac{1}{(1+x^2)^2} \right] (\lambda) = \frac{\pi}{2} e^{-|\lambda|} (|\lambda| + 1)$$

$$(c) \mathcal{F} \left[e^{-|bx+c|} \right] (\lambda) = \frac{2|b|}{\lambda^2 + b^2} e^{ic\lambda/b} \quad b, c \in \mathbb{R}, b \neq 0$$

- 12-13/S1 (9) Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni, riconducendosi, se possibile, a casi noti

$$(a) x^2 e^{-|x|} \quad (b) \frac{1}{(x+i)^3}$$

Risp: (a) $\frac{4(1-3\lambda^2)}{(\lambda^2+1)^3}$. (b) $i\pi\lambda^2 H(\lambda) e^{-\lambda}$.

- 12-13/S2 (10) Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni, riconducendosi, se possibile, a casi noti (H è la funzione a gradino di Heaviside)

$$(a) x e^{-3x^2+5ibx} \quad (b) e^{3x-6} H(2-x)$$

Risp: (a) $-\frac{i}{6}\sqrt{\frac{\pi}{3}}(\lambda-5b)\exp\left(-\frac{(\lambda-5b)^2}{12}\right)$. (b) $\frac{e^{-2i\lambda}}{3-i\lambda}$

- 12-13/S3 (11) Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni, riconducendosi, se possibile, a casi noti

$$(a) \frac{1}{(1+4x^2)^2} \quad (b) x^3 e^{-x^2}$$

Risp: (a) $\frac{\pi}{8} e^{-|\lambda|/2} (|\lambda| + 2)$. (b) $\frac{i}{8}\sqrt{\pi} e^{-\frac{\lambda^2}{4}} \lambda (\lambda^2 - 6)$.

- [TF] (12) Sia \hat{f} la trasformata di Fourier della funzione f . Cosa si può affermare, nei casi seguenti, sul grado di derivabilità di \hat{f} senza doverla calcolare?

$$(a) f(x) = x^7 e^{-\sqrt{|x|}} \quad (b) f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2} \quad (c) f(x) = \frac{1}{1+|x|^3}$$

- [TF] (13) Sia \hat{f} la trasformata di Fourier della funzione f . Senza dover calcolare \hat{f} , è possibile affermare che \hat{f} è di classe C^p e che $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^q \hat{f}(\lambda) = 0$, in cui p e q valgono ...

$$(a) f(x) = \frac{1}{1+x^6} \quad (b) f(x) = \begin{cases} \sin^2(x) & \text{se } x \in [0, 2\pi] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- [TF] (14) Sia \hat{f} la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = x^2 e^{-|x|}$. Senza dover calcolare \hat{f} , è possibile affermare che $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^p \hat{f}(\lambda) = 0$ e che \hat{f} è di classe C^q in cui p e q valgono ...

- [TF] (15) Sia \hat{f} la trasformata di Fourier della funzione f . Senza dover calcolare \hat{f} , è possibile affermare che $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^p \hat{f}(\lambda) = 0$ e che \hat{f} è di classe C^q in cui p e q valgono ...

$$(a) f(x) = \frac{x-3}{1+x^4} \quad (b) f(x) = \begin{cases} (1-x^2)^2 & \text{se } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- (16) Sia $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una successione di funzioni nello spazio $L_1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ che converge ad $f \in L_1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$. Sia $\hat{f}_n := \mathcal{F}[f_n]$ e $\hat{f} := \mathcal{F}[f]$. Dimostrare che \hat{f}_n converge uniformemente a \hat{f} .