Modelli e Metodi Matematici della Fisica. E1

Filippo Cesi – 2010–11

Nome	
Cognome	

Devo verbalizzare questo esame come (fare una croce):

12 CFU (AA 2010-11)	6 CFU (solo anal. funzionale)	6 CFU (solo anal. complessa)
6 + 6 CFU	altro:	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
ordine e calligrafia	
test	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (4 pt). Calcolare il raggio di convergenza

$$(a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\, z^n \qquad\qquad (b)\quad \sum_{n=0}^{\infty} (2-i)^n\, z^{3n}$$

Risp: (a) 1/4. (b) $1/\sqrt[6]{5}$.

(2) (3 pt). Sia X l'insieme delle soluzioni dell'equazione $z^i = 1 + i\sqrt{3}$ (usare il ramo principale per definire la potenza).

(a) Determinare X.
(b) Determinare i punti di accumulazione di X in $\mathbb{C}$ (se esistono).
(c) Quante di queste soluzioni appartengono all'anello $\{z \in \mathbb{C} : 1 \le |z| \le 100\}$?

Risp: Si trova

$$X = \{z_k : k \in \mathbb{Z}\} \qquad \text{in cui} \quad z_k := \exp\big[\pi/3 + 2k\pi - i\log 2\big]\,.$$

I punti z_k si trovano sulla semiretta uscente dall'origine che forma un angolo $\alpha = -\log 2$. Inoltre

$$|z_k| = \exp\big[\pi/3 + 2k\pi\big]\,,$$

per cui

$$\lim_{k\to-\infty} |z_k| = 0\,.$$

Quindi il punto $z = 0$ è l'unico punto di accumulazione di X. L'unica soluzione che appartiene all'insieme $\{z \in \mathbb{C} : 1 \le |z| \le 100\}$ è z_0. Infatti

$$|z_0| = e^{\pi/3} < 3^2 = 9$$
$$|z_1| = e^{7\pi/3} > e^7 > 2^7 = 128\,.$$

(3) (4 pt). Determinare $f(A)$ e disegnare accuratamente su due grafici separati gli insiemi A e $f(A)$.

$$(a)\quad f(z) := ie^z \qquad\qquad A := \{z \in \mathbb{C} : 1 \le \operatorname{Re} z \le 2,\ -\pi/4 \le \operatorname{Im} z \le \pi/2\}$$
$$(b)\quad f(z) := \sqrt[3]{z}^{(+)} \qquad\qquad A := \{z \in \mathbb{C} : 1 \le |z| \le 4,\ \operatorname{Im} z < 0\}$$

Risp: (a)

$$f(A) := \{\rho e^{i\vartheta} : e \le \rho \le e^2,\ \pi/4 \le \vartheta \le \pi\}.$$

(b)

$$f(A) := \{\rho e^{i\vartheta} : 1 \le \rho \le \sqrt[3]{4},\ \pi/3 < \vartheta < 2\pi/3\}.$$

(4) (2 pt). Se $z = x + iy$, esprimere la quantità seguente in termini di funzioni reali di x e y

$$|e^{\cos z}|$$

Soluzione. Poichè

$$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y\,,$$

si ha

$$|e^{\cos z}| = e^{\operatorname{Re}(\cos z)} = \exp\left[\cos x \cosh y\right]\,.$$

(5) (3 pt). Sia f una funzione analitica sul primo quandrante $G = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z > 0\}$. Sapendo che $|f(z)| \leq \operatorname{Im} z$ per ogni $z \in G$, come posso maggiorare la quantità $|f''(z_0)|$ in cui $z_0 = 20 + 10i$?

Soluzione. Sia

$$R = \operatorname{dist}(z_0, G^c) = 10\,.$$

f è analitica sul disco $B_R(z_0)$. Inoltre vale

$$|f(z)| \leq \operatorname{Im} z \leq 20 \qquad \forall z \in B_R(z_0)\,.$$

Per il teorema sulla stima di Cauchy si ha

$$|f''(z_0)| \leq \frac{20\ 2!}{R^2} = \frac{2}{5}\,.$$

(6) (4 pt). Enunciare e dimostrare il Teorema di Morera.

(7) (4 pt). Calcolare l'integrale

$$\int_{|z-3i|=4} \frac{dz}{z\,(e^z - 1)}$$

Schema di soluzione. Sia

$$f(z) = \frac{1}{z\,(e^z - 1)}\,.$$

La funzione f ha le seguenti singolarità isolate

$$\begin{array}{ll} z_0 = 0 & \text{polo di ordine 2} \\ z_k = i2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0 & \text{polo di ordine 1} \end{array}$$

Le singolarità interne al cammino di integrazione sono $z_0 = 0$ e $z_1 = 2\pi i$. Si calcola facilmente

$$\operatorname{Res}(f, 0) = -\frac{1}{2} \qquad \operatorname{Res}(f, 2\pi i) = -\frac{i}{2\pi}\,.$$

Quindi

$$\int_{|z-3i|=4} \frac{dz}{z\,(e^z - 1)} = 2\pi i \left[\operatorname{Res}(f, 0) + \operatorname{Res}(f, 2\pi i)\right] = 1 - i\pi\,.$$

(8) (4 pt). Calcolare il seguente integrale. Il risultato è un numero reale e deve essere espresso in termini di quantità palesemente reali.

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{x^2 + 2\sqrt{3}x + 4}$$

Schema di soluzione. Denotando con γ il "solito" cammino chiuso a forma di pacman con la bocca lungo il semiasse reale positivo, si ottiene (se γ contiene tutte le singolarità dell'integrando)

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{x^2 + 2\sqrt{3}x + 4} = \frac{1}{2} \int_\gamma \frac{\sqrt{z}^{(+)}\,dz}{z^2 + 2\sqrt{3}z + 4}$$

L'integrale lungo γ si calcola col teorema dei residui. Il risultato è

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{x^2 + 2\sqrt{3}x + 4} = \pi\sqrt{2}\,\sin(\pi/12) = \pi\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\,.$$