Modelli e Metodi Matematici della Fisica. E2

Filippo Cesi – 2010–11

Nome	
Cognome	

Devo verbalizzare questo esame come (fare una croce):

12 CFU (AA 2010-11)	6 CFU (solo anal. funzionale)	6 CFU (solo anal. complessa)
6 + 6 CFU	altro:	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
ordine e calligrafia	
test	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (4 pt). Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione indicata appartiene a $C_2(\mathbb{R})$ (lo spazio delle funzioni continue f tali che $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx < \infty$).

$$(a)\quad \frac{x^2 e^{-3|x|} + x\log(1+x^4)}{\sin(x^2) + (3+|x|)^\alpha} \qquad\qquad (b)\quad (1+x^2)^\alpha\, e^{-|x|}$$

Risp: (a) $\alpha > 3/2$. (b) $\alpha \in \mathbb{R}$.

(2) (3 pt). Dato $p(x) := e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$, consideriamo lo spazio vettoriale $C_2(\mathbb{R}, p(x)dx)$ con prodotto scalare

$$\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\, p(x)\, dx\,.$$

Sia $W := \operatorname{span}\{x, x^3\}$. Determinare la proiezione ortogonale su W delle due funzioni $h(x) = x^5$ e $k(x) = \cos(x)$.

Risp: $\pi_W(x^5) = 10x^3 - 15x$. $\pi_W(\cos x) = 0$ poichè cos è una funzione pari, mentre i vettori x e x^3 sono entrambi dispari.

(3) (4 pt). Enunciare e *dimostrare* il teorema che afferma che se v è un vettore arbitrario in uno spazio euclideo astratto V, i coefficienti di Fourier di v sono “ottimali”.

(4) (4.5 pt). Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato

$$(a)\quad D^2[x^2 \operatorname{sgn}(x-3)] \qquad\qquad (b)\quad x^3\, D^6(|x|) \qquad\qquad (c)\quad D^2[x^4 D(\log|x|)]$$

Risp: (a) $2\operatorname{sgn}(x-3) + 12\delta_3 + 18\delta_3'$. (b) $-48\delta_0'$. (c) $6x$.

(5) (3 pt). Sviluppare in serie trigonometrica di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ la funzione $f(x) = x$. Usando l'uguaglianza di Parseval si ottiene il valore della somma di una particolare serie numerica. Scrivere questa identità.

Risp:

$$x \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(nx)}{n} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

(6) (4.5 pt). Sia T l'operatore lineare su ℓ_2 definito come

$$Tx = \left(x_1 + \frac{x_2}{2}, \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3}, \frac{x_3}{3} + \frac{x_4}{4}, \ldots\right)$$

(a) Determinare T^*. $T^*x = (?, ?, ?, ?, \ldots)$

(b) Trovare gli autovalori di T. Scrivere esplicitamente i 3 autovalori più grandi in modulo e, per ognuno di essi, un autovettore corrispondente.

(c) Dire se $\lambda = 0$ appartiene allo spettro continuo di T (dimostrare).

Risp: $T^*x = \left(x_1, \frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_2+x_3}{3}, \frac{x_3+x_4}{4}, \ldots\right)$. Gli autovalori sono $\lambda_n = 1/n$ con $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$. Il punto $\lambda = 0$ appartiene allo spettro continuo. La soluzione è molto simile a quella di un problema analogo che si trova in 07-08/S1.

(7) (3 pt). Dimostrare le seguenti affermazioni (se l'affermazione è vera), o esibire un controesempio (se è falsa). Nel seguito V è uno spazio di Hilbert e S e T sono operatori lineari limitati arbitrari su V.

(a) Se T è suriettivo, allora T è anche iniettivo.

(b) Se $I - T$ è invertibile, allora $\|T\| < 1$.

(c) Se S e T sono iniettivi, allora $S+T$ è iniettivo.

Soluzione. (a) Falso. ϑ_-, ad esempio, è suriettivo, ma non iniettivo.

(b) Falso. Sia $T = 2I$. Allora $\|T\| = 2$ e $I - T = -I$ è invertibile.

(c) Falso. Sia $S = I$, $T = -I$. S e T sono iniettivi, ma $S + T = 0$ non lo è.

(8) (3 pt). Una successione $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ in uno spazio vettoriale normato $(V, \|\cdot\|)$ è detta assolutamente sommabile se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\| < \infty\,.$$

Si assuma V completo (quindi di Banach). Dimostrare che se $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ è assolutamente sommabile, allora esiste $v \in V$ tale che $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v$.

Soluzione. Assumo che (v_n) sia assolutamente sommabile. Sia

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} v_k \qquad\qquad t_n := \sum_{k=1}^{n} \|v_k\|$$

Dire che (v_n) è assolutamente sommabile è equivalente ad affermare che la successione di numeri reali (t_n) è convergente. Quindi (t_n) è di Cauchy.

Per ogni coppia di interi positivi n, m con $n > m$ si ha inoltre

$$\|S_n - S_m\| = \Big\| \sum_{k=m+1}^{n} v_k \Big\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|v_k\| = |t_n - t_m|\,.$$

Da questa disuguaglianza segue che anche la successione (S_n) è di Cauchy. Ma per ipotesi V è completo, dunque (S_n) è una successione convergente. In altre parole esiste $v \in V$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} S_n = v\,.$$

Questo limite può essere anche scritto come

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = v\,.$$