Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S1/AC

Filippo Cesi – 2010–11

Nome	
Cognome	

Devo verbalizzare questo esame come (fare una croce):

12 CFU (AA 2010-11)	6 CFU (solo anal. funzionale)	6 CFU (solo anal. complessa)
6 + 6 CFU	altro:	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
test	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (6 pt). Sia $z = 1 + i\sqrt{3}$. Calcolare (usare il ramo principale del log)

$$(a)\quad \mathrm{Im}(z^8) \qquad\qquad (b)\quad \log(z^8) \qquad\qquad (c)\quad |i^z|$$

Risp: (a) $2^7\sqrt{3}$. (b) $8\log 2 + i2\pi/3$. (c) $e^{-\sqrt{3}\pi/2}$.

(2) (4 pt). Calcolare il raggio di convergenza

$$(a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\, z^n \qquad\qquad (b)\quad \sum_{n=0}^{\infty} (1-i)^{2n}\, z^n$$

Risp: (a) $1/4$. (b) $1/2$.

(3) (4 pt). Trovare la parte singolare dello sviluppo in serie di Laurent in $z = 0$ di f

$$f(z) = \frac{1}{z^2\,(e^z - 1)}$$

Risp: $f(z) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{12z} + \mathcal{O}(1)$.

(4) (5 pt). Calcolare

$$(a)\quad \int_{|z-1|=3} \frac{z(z+2)}{\sin^2 z}\, dz \qquad\qquad (b)\quad \int_{|z|=2} \frac{z^3\,(1-z)}{1+z^5}\, dz$$

Schema di soluzione. (a) Le singolarità che si trovano all'interno del cammino di integrazione sono

$$z = 0 \quad \text{(polo di ordine 1)} \qquad\qquad z = \pi \quad \text{(polo di ordine 2)}\,.$$

Si ha quindi

$$\int_{|z-1|=3} \frac{z(z+2)}{\sin^2 z}\, dz = 2\pi i\big(\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,\pi)\big) = 2\pi i\big(2 + (2+2\pi)\big) = 4\pi i(2+\pi)\,.$$

(b) Poichè l'integrando è analitico nella regione all'esterno del cammino di integrazione, posso usare il teorema sul residuo all'infinito. Ottengo:

$$\int_{|z|=2} \frac{z^3\,(1-z)}{1+z^5}\, dz = -2\pi i\ \mathrm{Res}(f,\infty) = 2\pi i\ \mathrm{Res}\Big(\frac{1}{z^2} f(1/z), 0\Big) = -2\pi i\,.$$

(5) (5 pt). Calcolare

$$(a)\quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^5+1} \qquad\qquad (b)\quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\,(x+1)}$$

Schema di soluzione. (a) Sia $f(x) = (x^5+1)^{-1}$ e sia γ_R il cammino chiuso a forma di fetta di torta di raggio R e angolo $\alpha = 2\pi/5$. Più precisamente

$$\gamma_R = [0,R] + C_R + [Re^{i\alpha}, 0] \qquad \text{in cui } C_R(t) := Re^{it}\ t \in [0,\alpha].$$

Si ottiene allora

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^5+1} = \frac{J}{1 - e^{i2\pi/5}}\,,$$

in cui

$$J = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\, dz\,.$$

L'integrale J si calcola col metodo dei residui. In questo modo si ottiene

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dx}{x^5+1} &= \frac{2\pi i}{1-e^{i2\pi/5}}\ \mathrm{Res}(f, e^{i\pi/5}) \\ &= -\frac{2\pi i}{1-e^{i2\pi/5}}\,\frac{1}{5}e^{i\pi/5} = \frac{\pi/5}{\sin(\pi/5)}\,.\end{aligned}$$

(b) $2\pi/\sqrt{3}$ (caso particolare di un esercizio assegnato in "Tecniche di integrazione").

(6) (4 pt). Sia G una regione di $\mathbb{C}$ e sia $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una successione di funzioni analitiche su G. Dimostrare che se f_n converge uniformemente ad una funzione f allora f è analitica.

*Soluzione.*Rispondo a voce (ma è una conseguenza quasi immediata del teorema di Morera).

Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S1/AF

Filippo Cesi – 2010–11

Nome	
Cognome	

Devo verbalizzare questo esame come (fare una croce):

12 CFU (AA 2010-11)	6 CFU (solo anal. funzionale)	6 CFU (solo anal. complessa)
6 + 6 CFU	altro:	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
test	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (4 pt). Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione indicata appartiene a $C_2(\mathbb{R})$ (lo spazio delle funzioni continue f tali che $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx < \infty$).

$$(a) \quad \frac{x + 2\sin x}{1 + |x|^\alpha} \qquad\qquad (b) \quad (1+x^2)^\alpha \exp\Big[\frac{1}{1+x^2}\Big]$$

Soluzione. (a) Si ha

$$|f(x)|^2 \sim \frac{1}{|x|^{2(\alpha-1)}} \qquad \text{per } x \to \pm\infty,$$

quindi deve valere $2(\alpha - 1) > 1$, vale a dire $\alpha > 3/2$.

(b) Poichè

$$\lim_{x\to\pm\infty} \exp\Big[\frac{1}{1+x^2}\Big] = 1\,,$$

il fattore esponenziale è irrilevante per questo problema. Quindi

$$|f(x)|^2 \sim |x|^{4\alpha} \qquad \text{per } x \to \pm\infty,$$

da cui si deduce che la condizione cercata è $4\alpha < -1$, cioè $\alpha < -1/4$.

(2) (3 pt). Calcolare il seguente integrale scritto nella notazione "dei fisici", in cui compare la "funzione composta della delta di Dirac", semplificando il più possibile il risultato (il risultato è un numero reale).

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\pi/3}\,\delta(x^3 - x)\,dx$$

Soluzione. La funzione $b(x) := x^3 - x$ si annulla nei punti

$$x^3 - x = 0 \quad\iff\quad x = 0, \pm 1\,.$$

Inoltre si ha

$$b'(x) = 3x^2 - 1 \qquad\qquad |b'(0)| = 1 \qquad\qquad |b'(\pm 1)| = 2$$

da cui si ottiene

$$\delta(x^3 - x) = \delta_0 + (\delta_1 + \delta_{-1})/2\,.$$

Quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\pi/3}\,\delta(x^3 - x)\,dx = \delta_0(e^{ix\pi/3}) + \frac{1}{2}\big[\delta_1(e^{ix\pi/3}) + \delta_{-1}(e^{ix\pi/3})\big]$$
$$= 1 + \frac{1}{2}\big(e^{i\pi/3} + e^{-i\pi/3}\big) = 1 + \cos(\pi/3) = 3/2\,.$$

(3) (4 pt). Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato

$$(a) \quad D^2[x^2\ \mathrm{sgn}(x-2)] \qquad\qquad (b) \quad D^3[e^{-x^2}\,\delta_0'']$$

Risp: (a) $2\,\mathrm{sgn}(x-2) + 8\delta_2 + 8\delta_2'$. (b) $\delta_0^{(5)} - 2\delta_0^{(3)}$.

(4) (4 pt). Nello spazio vettoriale $P[0,\infty)$ (i polinomi su $[0,\infty)$) consideriamo il prodotto scalare $\langle f, g\rangle := \int_0^\infty f(x)g(x)\,e^{-x}\,dx$. Sia $W := \mathrm{span}\{x-1\,,\,x^2\}$.

(a) La proiezione ortogonale su W di x^3 può essere scritta come $\pi_W(x^3) = ax^2 + bx + c$. Determinare a, b, c.

(b) Verificare che il vettore $h(x) := x^3 - \pi_W(x^3)$ è ortogonale a W.

(Ricorda: $\int_0^\infty x^n\, e^{-x}\, dx = n!$).

Risp: $\pi_W(x^3) = 6x^2 - 6x + 6$.

(5) (4 pt). Sviluppare in serie trigonometrica di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ la funzione $f(x) = |x|$. Usando *l'uguaglianza di Parseval* si ottiene il valore della somma di una particolare serie numerica. Scrivere questa identità.

Risp:

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos[(2k+1)x]}{(2k+1)^2} \qquad\qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

(6) (5 pt). Sia T l'operatore lineare su ℓ_2 definito come

$$Tx = \Big(2x_1,\, x_1 - x_2,\, x_2,\, x_3,\, x_4,\, x_5,\, \ldots\Big)$$

(a) Determinare T^*. $T^*x = (?, ?, ?, ?, \ldots)$

(b) Trovare gli autovalori di T e, per ognuno di essi, esibire in forma esplicita un autovettore corrispondente.

(c) Dire se $\operatorname{Ran} T$ è denso in ℓ_2 (dimostrare).

Soluzione. (a) Dall'identità $\langle T^*x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ si ricava facilmente

$$T^*x = \big(2x_1 + x_2,\, x_3 - x_2,\, x_4,\, x_5,\, x_6,\, \ldots\big)\,.$$

(b) L'equazione agli autovalori $Tx = \lambda x$ fornisce il sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 &= \lambda x_1 \\ x_1 - x_2 &= \lambda x_2 \\ x_2 &= \lambda x_3 \\ x_3 &= \lambda x_4 \\ x_4 &= \lambda x_5 \\ &\ldots \end{aligned}$$

La prima equazione ci dice che $\lambda = 2$ oppure $x_1 = 0$. Consideriamo i due casi. Se $\lambda = 2$, posso risolvere il sistema ottenendo

$$x_k = \frac{x_1}{3\, 2^{k-2}} \qquad k = 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Ponendo, ad esempio, $x_1 = 1$ ottengo

$$x = (1,\, 1/3,\, 1/6,\, 1/12,\, \ldots)\,. \qquad ①$$

Poichè $x \in \ell_2$, x è un autovettore di T con autovalore $\lambda = 2$.

Consideriamo ora l'altro caso in cui $\lambda \neq 2$ e $x_1 = 0$. Dalla seconda equazione ottengo

$$(\lambda + 1)x_2 = 0\,.$$

Di nuovo, ci sono due possibilità: $\lambda = -1$ o $x_2 = 0$. Se $x_2 = 0$ segue che tutte le altre componenti x_k sono nulle, vale a dire $x = 0$, quindi non troviamo altre soluzioni (non banali) per l'equazione agli autovalori.

Se, infine, $\lambda = -1$ risolvendo il sistema si ottiene

$$x_1 = 0 \qquad\qquad x_k = (-1)^k x_2 \quad k = 3, 4, 5, \ldots$$

Questa soluzione non appartiene ad ℓ_2 perchè x_k non tende a zero per $k \to \infty$ (a meno che non si prenda $x_2 = 0$, ma in quel caso risulta $x = 0$). Quindi $\lambda = -1$ non è un autovalore di T. Concludendo, T ha un unico autovalore $\lambda = 2$ e il corrispondente autovettore è dato dalla ①.

(c) $\operatorname{Ran} T$ è denso in ℓ_2 significa, per definizioe, che $\overline{\operatorname{Ran} T} = \ell_2$. Poichè $\overline{\operatorname{Ran} T} = (\operatorname{Ker} T^*)^\perp$, ottengo che $\operatorname{Ran} T$ è denso in ℓ_2 se e solo il nucleo di T^* è banale, cioè uguale a $\{0\}$. Calcolo dunque $\operatorname{Ker} T^*$. Risolvendo $T^* = 0$ si ottiene

$$x_2 = x_3 = -2x_1 \qquad\qquad x_k = 0 \quad k = 4, 5, 6, \ldots$$

Quindi

$$\operatorname{Ker} T^* = \operatorname{span}\{y\} \qquad \text{in cui } y = (1, -2, -2, 0, 0, 0, \ldots)\,.$$

Dunque T^* ha un nucleo non banale. Di conseguenza $\operatorname{Ran} T$ non è denso in ℓ_2.

(7) (4 pt). Sia V lo spazio vettoriale di tutte le successioni reali $x = (x_k)_{k=1}^\infty$ che soddisfano la condizione

$$\sum_{k=1}^\infty k\,|x_k| < \infty\,,$$

sul quale definiamo la norma $\|x\| = \|x\|_1 = \sum_{k=1}^\infty |x_k|$. Dire se $(V, \|\cdot\|_1)$ è completo (dimostrare).

Soluzione. V è un sottospazio di ℓ_1. Dimostro che V non è completo, facendo vedere che V non è chiuso in $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$. A questo scopo costruisco una successione $(x^{(n)})_{n=1}^\infty$ di elementi di V che converge (rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$) ad un elemento x che *non* appartiene a V.

Sia

$$x_k^{(n)} := \begin{cases} \frac{1}{k^2} & \text{se } k \le n \\ 0 & \text{se } k > n. \end{cases}$$

É ovvio che $x^{(n)}$ appartiene a V, in quanto

$$\sum_{k=1}^\infty k\,|x_k^{(n)}| = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < \infty\,.$$

D'altra parte la successione $(x^{(n)})_{n=1}^\infty$ converge all'elemento x

$$x_k = \frac{1}{k^2}\,.$$

Infatti

$$\|x - x^{(n)}\|_1 = \sum_{k=1}^\infty |x_k - x_k^{(n)}| = \sum_{k=n+1}^\infty \frac{1}{k^2}\,.$$

Quindi $\|x - x^{(n)}\|_1$ è uguale al resto n-simo di una serie convergente. Di conseguenza

$$\lim_{n\to\infty} \|x - x^{(n)}\|_1 = 0\,.$$

Notiamo infine che

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\,|x_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty\,,$$

per cui $x \notin V$.

Ricapitolando, abbiamo costruito una successione di elementi di V che converge ad un elemento $x \in \ell_1 \backslash V$. Questo implica che V non è chiuso in ℓ_1 e dunque non è completo. $\square$