Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S2/AC

Filippo Cesi – 2010–11

Nome	
Cognome	

Devo verbalizzare questo esame come (fare una croce):

12 CFU (AA 2010-11)	6 CFU (solo anal. funzionale)	6 CFU (solo anal. complessa)
6 + 6 CFU	altro:	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
test	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (3 pt). Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $\sin z = 2$. Disegnare accuratamente sul piano complesso le soluzioni che si trovano all'interno del rettangolo di vertici: $(-6,-10)$, $(0,-10)$, $(0,10)$, $(-6,10)$.

Soluzione. L'equazione può essere scritta come

$$e^{iz} - e^{-iz} = 4i\,.$$

Ponendo $w = e^{iz}$ si ottiene

$$w^2 - 4iw - 1 = 0\,,$$

che ha come soluzioni

$$w_1 = i(2+\sqrt{3}) \qquad\qquad w_2 = i(2-\sqrt{3}) = i(2+\sqrt{3})^{-1}\,.$$

Dalla prima ottengo

$$e^{iz} = w_1$$

che, scrivendo $z = x + iy$, fornisce

$$e^{-y}\,e^{ix} = |w_1|\,e^{i\arg w_1} = (2+\sqrt{3})\,e^{i\pi/2}\,.$$

Al valore w_1 corrispondono dunque infinite soluzioni per z date da

$$y = -\log(2+\sqrt{3}) \qquad\qquad x = \pi/2 + 2k\pi \qquad\qquad k \in \mathbb{Z}\,,$$

vale a dire

$$z = \pi/2 + 2k\pi - i\log(2+\sqrt{3}) \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Analogamente si ottengono le soluzioni corrispondenti a w_2

$$z = \pi/2 + 2k\pi + i\log(2+\sqrt{3}) \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

L'insieme delle soluzioni è quindi dato dalla fomula

$$z = \pi/2 + 2k\pi \pm i\log(2+\sqrt{3}) \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Poichè $|\log(2+\sqrt{3})| < 10$, le soluzioni all'interno del rettangolo sono quelle la cui parte reale appartiene all'intervallo $[-6,0]$. Deve quindi essere

$$-6 \le \frac{\pi}{2} + 2k\pi \le 0\,.$$

L'unico valore di k che soddisfa queste disuguaglianze è chiaramente $k=-1$. Le soluzioni all'interno del rettangolo sono quindi due:

$$z_1 = -\frac{3\pi}{2} + i\log(2+\sqrt{3}) \qquad\qquad z_2 = -\frac{3\pi}{2} - i\log(2+\sqrt{3})\,.$$

(2) (4 pt). Calcolare il raggio di convergenza

$$(a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} 3^n\, z^{n!} \qquad\qquad (b)\quad \sum_{n=0}^{\infty} (1+2i)^n\, z^n$$

Soluzione. (a) Si ha

$$R^{-1} = \lim_{n\to\infty} \left[3^n\right]^{1/n!} = 1\,,$$

quindi $R = 1$.

(b) Analogamente, possiamo scrivere

$$R^{-1} = \lim_{n\to\infty} \left|(1+2i)^n\right|^{1/n} = |1+2i| = \sqrt{5}\,.$$

Quindi $R = 1/\sqrt{5}$.

(3) (4 pt). Sia f una funzione analitica sul primo quandrante $G = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z > 0\}$. Sapendo che $|f(z)| \leq \operatorname{Re} z$ per ogni $z \in G$, come posso maggiorare la quantità $|f''(z_0)|$ in cui $z_0 = 15 + 10i$?

Soluzione. Sia

$$R = \operatorname{dist}(z_0, G^c) = 10\,.$$

f è analitica sul disco $B_R(z_0)$. Inoltre, all'interno di questo disco, vale la disuguaglianza

$$|f(z)| \leq \operatorname{Re} z \leq 25 \qquad\qquad \forall z \in B_R(z_0)\,.$$

Per il teorema sulla stima di Cauchy si ha

$$|f''(z_0)| \leq \frac{25\ 2!}{R^2} = \frac{1}{2}\,.$$

(4) (4 pt). Trovare la parte singolare dello sviluppo in serie di Laurent in $z = 0$ di f

$$f(z) = \frac{e^z}{\sinh(z) - z}$$

Risp: $\frac{6}{z^3} + \frac{6}{z^2} + \frac{27}{10z} + \mathcal{O}(1)$.

(5) (6 pt). Calcolare

$$(a) \int\limits_{|z|=2} \frac{2z+3}{\sin(\pi z) - 1}\, dz \qquad\qquad (b) \int\limits_{|z|=2} \frac{z^2\,(z^2+z+1)}{(z^2+1)\,(3z^3+2)}\, dz$$

Risp: (a) $-(16/\pi)i$. (b) $(2\pi i)/3$ (con il metodo del residuo all'infinito).

(6) (3 pt). Calcolare

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}\, dx}{x^2 + 5x + 6}$$

Soluzione. Sia γ il cammino chiuso a forma di "pacman" con la bocca coincidente con il semiasse reale positivo e sia

$$f(z) := \frac{[\sqrt[3]{z}]^+}{z^2 + 5z + 6}$$

in cui $[\ ]^+$ indica che sto scegliendo il ramo $+$ della radice, vale a dire quello con il taglio lungo il semiasse reale positivo. Allora si ottiene

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}\, dx}{x^2+5x+6} = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi/3}} \int_\gamma f(z)\, dz = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi/3}} \sum_k \operatorname{Res}(f, z_k)\,,$$

in cui z_k sono le singolarità isolate di f. In questo caso ci sono due singolarità isolate

$$z = -2 \ \text{ e } \ z = -3$$

e sono entrambi poli semplici. Quindi

$$\operatorname{Res}(f, -2) = \frac{[\sqrt[3]{-2}]^+}{1} = \sqrt[3]{2}\, e^{i\pi/3}$$

$$\operatorname{Res}(f, -3) = \frac{[\sqrt[3]{-3}]^+}{-1} = -\sqrt[3]{3}\, e^{i\pi/3}\,.$$

In questo modo si ha

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{x^2+5x+6} = \frac{2\pi i\, e^{i\pi/3}}{1-e^{i2\pi/3}}\left[\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}\right]$$
$$= \frac{2\pi i}{e^{-i\pi/3}-e^{i\pi/3}}\left[\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}\right] = \frac{\pi}{\sin(\pi/3)}\left[\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right] = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left[\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right]$$

(7) (3 pt). Sia f una funzione intera (analitica su $\mathbb{C}$) che soddisfa la seguente condizione: esiste $M > 0$ tale che per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha $|f(z)| \leq M + \sqrt{|z|}$. Cosa posso affermare su f? (Dimostrare).

Soluzione. f è costante. Infatti dalla formula integrale di Cauchy e dall'ipotesi su $|f|$ segue che per $\forall z \in \mathbb{C}$

$$|f'(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z|=R}\frac{f(w)}{(w-z)^2}dw\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{|w-z|=R}\frac{|f(w)|}{|w-z|^2}dw \leq \frac{M+R^{1/2}}{R}.$$

con R arbitrariamente grande in quanto f è intera. Si conclude che $f'(z) = 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$ e quindi f costante in $\mathbb{C}$.

Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S2/AF

Filippo Cesi – 2010–11

Nome	
Cognome	

Devo verbalizzare questo esame come (fare una croce):

12 CFU (AA 2010-11)	6 CFU (solo anal. funzionale)	6 CFU (solo anal. complessa)
6 + 6 CFU	altro:	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
test	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (4 pt). Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione indicata appartiene a $C_2(\mathbb{R})$ (lo spazio delle funzioni continue f tali che $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx < \infty$).

$$(a)\quad \frac{x^2 + e^{\sin x}}{1 + |x|^\alpha} \qquad\qquad (b)\quad \frac{\exp\Big[\big(\log(1+x^2)\big)^2\Big]}{1 + |x|^\alpha}$$

Risp: (a) $\alpha > 5/2$. (b) Mai.

(2) (3 pt). Sia n un intero positivo pari, $n = 2, 4, 6, \ldots$. Calcolare il seguente integrale scritto nella notazione "dei fisici", in cui compare la "funzione composta della delta di Dirac", semplificando il più possibile il risultato.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi x)\, \delta(x^n - x)\, dx$$

Soluzione. Quando n è pari la funzione $b(x) := x^n - x$ si annulla nei punti

$$x^n - x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0, 1\,.$$

Inoltre si ha

$$b'(x) = nx^{n-1} - 1 \qquad |b'(0)| = 1 \qquad |b'(1)| = n - 1$$

da cui si ottiene

$$\delta(x^n - x) = \delta_0 + \frac{\delta_1}{n-1}\,.$$

Quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi x)\, \delta(x^n - x)\, dx = \delta_0(\cos(\pi x)) + \frac{1}{n-1}\delta_1(\cos(\pi x))$$
$$= 1 + \frac{\cos\pi}{n-1} = \frac{n-2}{n-1}\,.$$

(3) (4 pt). Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato

$$(a)\quad D^2(|\cos x|) \qquad\qquad (b)\quad D^3[e^{2x}\, D^4(|x|)]$$

Risp: (a) $-|\cos x| + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{\pi/2+k\pi}$. (b) $2\delta_0^{(5)} - 8\delta_0^{(4)} + 8\delta_0^{(3)}$.

(4) (4 pt). Nello spazio vettoriale $P(\mathbb{R})$ (i polinomi su $\mathbb{R}$) consideriamo il prodotto scalare

$$\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\, p(x)\, dx\,, \text{ in cui } p(x) := \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,.$$

Sia $W := \operatorname{span}\{1, x^4\}$. La proiezione ortogonale di x^2 su W può essere scritta come $\pi_W(x^2) = ax^4 + b$. Determinare le costanti a e b. Verificare che il vettore $u := x^2 - \pi_W(x^2)$ è ortogonale ai due vettori 1 e x^4.

Soluzione. Utilizzando il procedimento di Gram–Schmidt trovo una base ortogonale $\{w_1, w_2\}$ di W

$$w_1(x) = 1$$
$$\|w_1\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |1|^2\, p(x)\, dx = 1$$
$$w_2(x) = x^4 - \frac{\langle x^4, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\, w_1(x) = x^4 - \int_{\mathbb{R}} y^4\, p(y)\, dy = x^4 - 3$$
$$\|w_2\|^2 = \int_{\mathbb{R}} (x^4 - 3)^2\, p(x)\, dx = 7!! - 6 \cdot 3!! + 9 = 96\,.$$

A questo punto uso la formula esplicita della proiezione ortogonale su W

$$\pi_W(v) = \sum_k \frac{\langle v, w_k \rangle}{\|w_k\|^2}\, w_k\,,$$

che mi dà

$$\begin{aligned}
\pi_w(x^2) &= \frac{\langle x^2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\, w_1(x) + \frac{\langle x^2, w_2\rangle}{\|w_2\|^2}\, w_2(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} y^2\, p(y)\, dy + \frac{1}{96}\left(\int_{\mathbb{R}} y^2\,(y^4-3)\, p(y)\, dy\right)(x^4-3) \\
&= 1 + \frac{1}{96}(5!!-3)(x^4-3) = \frac{x^4}{8} + \frac{5}{8}.
\end{aligned}$$

Sia $u := x^2 - \pi_W(x^2) = x^2 - 5/8 - x^4/8$. Si verifica facilmente che u è ortogonale sia a 1 che a x^4.

(5) (4 pt). Sia g la trasformata di Fourier della funzione f. Senza dover calcolare g, è possibile affermare che g è di classe C^p e che $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^q g(\lambda) = 0$, in cui p e q valgono ...

$$f(x) = \begin{cases} \cos^2(x) & \text{se } x \in [-\pi/2, \pi/2] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Soluzione. La funzione f è continua a supporto compatto, quindi $x^k f \in L_1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Di conseguenza $g \in C^\infty$.

Voglio trovare il massimo valore di q tale che $f \in C^{q-1}$ con $f^{(q)}$ continua a tratti. Gli unici punti in cui f o le sue derivate possono essere discontinue sono i due punti di "raccordo", $x = -\pi/2$ e $x = \pi/2$. Poichè f è simmetrica rispetto all'origine, è sufficiente limitarsi a studiare la continuità delle derivate di f in $x = \pi/2$. La funzione f è identicamente nulla a destra di $\pi/2$, quindi per trovare q deriviamo ripetutamente la funzione $h(x) := \cos^2(x)$, finchè non troviamo $h^{(q)}(\pi/2) \neq 0$.

$$\begin{aligned}
h'(x) &= -2\sin(x)\cos(x) = -2\sin(2x) & h'(\pi/2) &= 0 \\
h''(x) &= -4\,\cos(2x) & h''(\pi/2) &= -4\cos(\pi) = 4
\end{aligned}$$

Quindi $q = 2$. Di conseguenza g tende a zero quando $\lambda \to \infty$ più velocemente di $1/\lambda^2$.

(6) (5 pt). Sia T l'operatore lineare su ℓ_2 definito come

$$Tx = \left(x_2,\, \frac{x_1}{2},\, \frac{x_4}{3},\, \frac{x_3}{4},\, \frac{x_6}{5},\, \frac{x_5}{6},\, \dots\right)$$

(a) Determinare T^*. $T^*x = (?, ?, ?, ?, \dots)$
(b) Trovare gli autovalori di T. Per ogni autovalore esibire un autovettore corrispondente. Scrivere esplicitamente i 4 autovalori più grandi in modulo e, per ognuno di essi, un autovettore corrispondente.
(c) Dire se $\operatorname{Ran} T$ è denso in ℓ_2 (dimostrare).

Risp.

(a)

$$T^*x = \left(\frac{x_2}{2},\, x1,\, \frac{x_4}{4},\, \frac{x_3}{3},\, \frac{x_6}{6},\, \frac{x_5}{5},\, \dots\right)$$

(b) L'insieme degli autovalori è

$$\sigma_p(T) := \left\{ \lambda_k^{\pm} := \pm\frac{1}{\sqrt{2k(2k-1)}} : k = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

Autovettori corrispondenti a λ_k^+ e λ_k^- sono

$$\begin{aligned} u_k^+ &= (0, 0, \dots, 0, \sqrt{2k}, \sqrt{2k-1}, 0, 0, \dots) \\ u_k^- &= (0, 0, \dots, 0, \sqrt{2k}, -\sqrt{2k-1}, 0, 0, \dots) \end{aligned}$$

in cui gli unici due elementi non nulli occupano le posizioni $2k-1$ e $2k$. I 4 autovalori più grandi in modulo, con rispettivi autovettori sono

$$\begin{aligned} \lambda_1^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} & u_1^+ &= (\sqrt{2}, 1, 0, 0, 0, \dots) \\ \lambda_1^- &= -\frac{1}{\sqrt{2}} & u_1^- &= (\sqrt{2}, -1, 0, 0, 0, \dots) \\ \lambda_2^+ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} & u_2^+ &= (0, 0, 2, \sqrt{3}, 0, 0, 0, \dots) \\ \lambda_2^- &= -\frac{1}{2\sqrt{3}} & u_2^- &= (0, 0, 2, -\sqrt{3}, 0, 0, 0, \dots) \end{aligned}$$

(c) Si dimostra facilmente che $\operatorname{Ker} T^* = \{0\}$, quindi $\overline{\operatorname{Ran} T} = \ell_2$, vale a dire $\operatorname{Ran} T$ è denso in ℓ_2.

(7) (3 pt). Sia T un operatore lineare limitato su uno spazio euclideo $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ e sia

$$N(T) := \sup_{v,w \in V:\, v\neq 0,\, w\neq 0} \frac{|\langle Tv, w\rangle|}{\|v\|\,\|w\|}.$$

Dimostrare che $N(T) = \|T\|$.

Soluzione. Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e dalla definizione di norma operatoriale si ottiene

$$\frac{|\langle Tv, w\rangle|}{\|v\|\,\|w\|} \leq \frac{\|Tv\|\,\|w\|}{\|v\|\,\|w\|} = \|T\|\,\|w\| \leq \|T\|,$$

quindi

$$N(T) \leq \|T\|.$$

D'altra parte si ha

$$N(T) := \sup_{v,w \in V:\, v\neq 0,\, w\neq 0} \frac{|\langle Tv, w\rangle|}{\|v\|\,\|w\|} \geq \sup_{v \in V:\, v\neq 0} \frac{|\langle Tv, Tv\rangle|}{\|v\|\,\|Tv\|} \sup_{v \in V:\, v\neq 0} \frac{\|Tv\|}{\|v\|} = \|T\|.$$

Abbiamo dimostrato che $N(T) = \|T\|$.