# Modelli e Metodi Matematici della Fisica. E1

Filippo Cesi – 2011–12

| | |
|---|---|
| Nome | |
| Cognome | |

Devo verbalizzare questo esame come (fare una croce):

| | | |
|---|---|---|
| 6 CFU | 8 CFU | 4 + 6 CFU |
| altro: | | |

| problema | voto |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |
| 8 | |
| ordine e calligrafia | |
| test | |
| totale | |
| voto in trentesimi | |

**Regolamento:**

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (4 pt). Calcolare il raggio di convergenza

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\, z^n \qquad\qquad (b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^4\, e^{-n^2}\, z^n$$

*Risp:* (a) 1/4. (b) $= \infty$.

(2) (3 pt). Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $i^z = 1 - i$ (usare il ramo principale per definire la potenza). Disegnare sul piano complesso le soluzioni che si trovano all'interno del quadrato di lato 16 centrato nell'origine. Quante sono queste ultime?

*Risp:* Per definizione di potenza con esponente complesso, si ha

$$i^z = \exp(z \log(i)) = \exp\big[z(\log|i| + i \operatorname{Arg} i)\big] = e^{iz\pi/2}\,.$$

L'equazione $i^z = i$ diventa dunque

$$e^{iz\pi/2} = 1 - i\,.$$

Le soluzioni di questa equazione sono

$$iz\frac{\pi}{2} = \log|1-i| + i(\arg(1-i) + 2k\pi) = \frac{1}{2}\log 2 + i(-\pi/4 + 2k\pi) \qquad k \in \mathbb{Z}\,,$$

vale a dire

$$z_k = 4k - \frac{1}{2} - i\,\frac{\log 2}{\pi} \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Il quadrato di lato 16 centrato nell'origine è determinato dalle condizioni

$$|\operatorname{Re} z| \le 8 \qquad |\operatorname{Im} z| \le 8\,.$$

Si verifica facilmente che le soluzioni per le quali queste condizioni sono soddisfatte, sono 4:

$$z_{-1},\ z_0\ z_1,\ z_2\,.$$

(3) (4 pt). Determinare l'ordine di grandezza $\mathcal{O}(z^n)$ nel limite $z \to 0$

$$(a) \quad \sin\big[\pi e^{z^2}\big] \qquad\qquad (b) \quad \tan[\log(1+z) - z]$$

*Soluzione.* (a).

$$\sin\big[\pi e^{z^2}\big] = \sin\big[\pi(1 + \mathcal{O}(z^2))\big] = \sin(\pi + \mathcal{O}(z^2)) = -\sin(\mathcal{O}(z^2)) = \mathcal{O}(z^2)\,.$$

(b). Poichè $\tan z = \mathcal{O}(z)$, si ha

$$\tan[\log(1+z) - z] = \tan(z + \mathcal{O}(z^2) - z) = \tan(\mathcal{O}(z^2)) = \mathcal{O}(z^2)\,.$$

(4) (3 pt). Se $z = x + iy$, esprimere la quantità seguente in termini di funzioni reali di $x$ e $y$

$$\operatorname{Re}\big[\sinh(z^2)\big]\,.$$

*Soluzione.* Sfruttando le relazioni esistenti fra funzioni trigonomentriche ed iperboliche, possiamo facilmente trovare la formula di addizione per il sinh.

$$\begin{aligned}\sinh(a+b) &= -i\sin(i(a+b)) = -i(\sin(ia)\cos(ib) + \cos(ia)\sin(ib)) \\ &= -i(i\sinh(a)\cosh(b) + i\cosh(a)\sinh(b)) = \sinh(a)\cosh(b) + \cosh(a)\sinh(b)\,.\end{aligned}$$

Usando questa identità ottengo

$$\begin{aligned}\sinh(z^2) &= \sinh(x^2 - y^2 + i2xy)\\ &= \sinh(x^2 - y^2)\cos(2xy) + i\cosh(x^2 - y^2)\sin(2xy)\,.\end{aligned}$$

Di conseguenza si ha

$$\operatorname{Re}\sinh(z^2) = \sinh(x^2 - y^2)\cos(2xy)\,.$$

(5) (4 pt). Calcolare lo sviluppo di Taylor nell'origine fino all'ordine $z^2$ della funzione

$$f(z) = \frac{z\cos z}{z^2 + \log(1+z)}$$

*Risp:* $1 - \frac{z}{2} - \frac{7z^2}{12} + \mathcal{O}\left(z^3\right)$.

(6) (3 pt). Sia $f$ una funzione analitica sulla semistriscia $G = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Re} z < 22,\ \operatorname{Im} z > 0\}$. Sapendo che $|f(z)| \leq \operatorname{Im} z$ per ogni $z \in G$, come posso maggiorare la quantità $|f''(z_0)|$ in cui $z_0 = 15 + 5i$? [Sugg: fare un disegno accurato].

*Soluzione.* Sia (fare un disegno)

$$R = \operatorname{dist}(z_0, G^c) = 5\,.$$

$f$ è analitica sul disco $B_R(z_0)$. Inoltre, all'interno di questo disco, vale la disuguaglianza

$$|f(z)| \leq \operatorname{Im} z \leq 10 \qquad\qquad \forall z \in B_R(z_0)\,.$$

Per il teorema sulla stima di Cauchy si ha

$$|f''(z_0)| \leq \frac{10\ 2!}{R^2} = \frac{4}{5}\,.$$

(7) (3 pt). Dare la definizione di indice di un cammino rispetto ad un punto e dimostrare che si tratta di un numero intero.

(8) (4 pt). Data la funzione $f(z) = \log(1 + iz^2)$ (ramo principale):

(a) determinare il dominio di analiticità di $f$ e disegnarlo sul piano complesso
(b) calcolare $a_+ := \lim_{\varepsilon\to 0^+} f(1 + i + \varepsilon)$ e $a_- := \lim_{\varepsilon\to 0^+} f(1 + i - \varepsilon)$.

*Risp:* (a) Sia $D$ il dominio di analiticità di $f$. Poichè dobbiamo prendere il ramo principale si ha:

$$D = \mathbb{C}\backslash X\,,$$

in cui

$$X = \{z \in \mathbb{C} : 1 + iz^2 \leq 0\} = \{1 + iz^2 = -t : t \geq 0\}\,.$$

Risolvo quindi l'equazione $1 + iz^2 = -t$, dipendente dal parametro reale positivo $t$.

$$\begin{aligned}&z^2 = i(1+t) = e^{i\pi/2}(1+t) && t \geq 0\\ &z = \sqrt{1+t}\,e^{i(\pi/4 + k\pi)},\ k = 0,1 && t \geq 0\,.\end{aligned}$$

Posso quindi scrivere, ponendo $s = \sqrt{1+t}$,

$$X = \{s\,e^{i(\pi/4+k\pi)} : s \geq 1,\ k = 0,1\}\,.$$

Si tratta di 2 semirette che partono dalla circonferenza unitaria e si dirigono radialmente verso l'esterno con angoli $\pi/4, 5\pi/4$.

(b) Nel seguito indicherò con $\varepsilon'$ una generica quantità che tende a zero quando $\varepsilon \to 0$. Il valore di $\varepsilon'$ può cambiare da un'equazione all'altra. Voglio calcolare

$$a_+ = \lim_{\varepsilon \to 0^+} f(1 + i + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \log(w_\varepsilon)\,,$$

in cui

$$w_\varepsilon := 1 + i(1 + \varepsilon + i)^2\,.$$

Poichè

$$\begin{aligned} w_\varepsilon &= 1 + i(1 + \varepsilon^2 - 1 + 2\varepsilon + 2i\varepsilon + 2i) \\ &= 1 + i(\varepsilon' + i(\varepsilon + 2)) = 1 + i\varepsilon' - (\varepsilon + 2) \\ &= -1 - \varepsilon + i\varepsilon'\,, \end{aligned}$$

si vede che $w_\varepsilon$ tende al punto $-1$ arrivando dall'alto, vale a dire dal semipiano superiore del piano complesso. Di conseguenza

$$a_+ = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \log(w_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \big[\log|w_\varepsilon| + i\,\mathrm{Arg}(w_e)\big] = i\pi\,.$$

Analogamente si trova $a_- = -i\pi$.