Modelli e Metodi Matematici della Fisica. E2

Filippo Cesi – 2011–12

Nome	
Cognome	

Devo verbalizzare questo esame come (fare una croce):

6 CFU	8 CFU	4 + 6 CFU
altro:		

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
ordine e calligrafia	
test	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (4 pt). Determinare tutte le singolarità isolate, la loro natura, e, per i poli, trovare l'ordine.

$$(a)\quad \frac{1}{(z^2+1)^2} \qquad\qquad (b)\quad \frac{z^3-z^2}{\cos(\pi z)+1} \qquad\qquad (c)\quad \exp\left[\frac{1}{z}+1+z^2\right]$$

Soluzione. (a) Poichè

$$\frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}\,,$$

Le singolarità sono

$$z = \pm i \qquad\qquad \text{poli di ordine } 2\,.$$

(b) Sia

$$f(z) = \frac{z^3-z^2}{\cos(\pi z)+1} = \frac{N(z)}{D(z)} \qquad \text{in cui } N(z) = z^3 - z^2 \text{ e } D(z) = \cos(\pi z)+1$$

Trattandosi del quoziente fra 2 funzioni intere, le uniche singolarità si trovano in corrispondenza degli zeri del denominatore. Essi sono

$$\cos(\pi z)+1 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad z_n = 2n+1,\ n \in \mathbb{Z}\,.$$

Poichè

$$\begin{aligned} D'(z_n) &= -\pi \sin(\pi(2n+1)) = 0 \\ D''(z_n) &= -\pi^2 \cos(z_n) \neq 0\,, \end{aligned}$$

i punti z_n sono zeri di molteplicità 2.

Il numeratore può essere scritto come

$$z^3 - z^2 = z^2(z-1)\,,$$

Quindi il numeratore possiede

$$\begin{aligned} &\text{uno zero di molteplicità 2 nel punto } z = 0 \\ &\text{uno zero di molteplicità 1 nel punto } z = 1\,. \end{aligned}$$

Combinando le informazioni sul numeratore con quelle sul denominatore, ottengo che le singolarità di f sono

$$\begin{aligned} &z_n = 2n+1 \qquad && n \neq 0 \qquad && \text{poli di ordine 2} \\ &z_0 = 1 && && \text{polo di ordine } 1\,. \end{aligned}$$

(c) La funzione

$$f(z) = \exp\left[\frac{1}{z}+1+z^2\right]$$

ha un'unica singolarità nel punto $z = 0$. Questa è necessariamente una singolarità essenziale. Infatti se fosse eliminabile oppure un polo potrei scrivere

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{z^n} + \frac{c_{-n+1}}{z^{n-1}} + \frac{c_{-n+2}}{z^{n-2}} + \cdots$$

in cui n è in intero (positivo nel caso di un polo). Ma allora si avrebbe

$$e^{1/z} = f(z)\, e^{-1-z^2}$$

e, di conseguenza, sviluppando e^{-1-z^2} in serie di Taylor,

$$e^{1/z} = \frac{c'_{-n}}{z^n} + \frac{c'_{-n+1}}{z^{n-1}} + \frac{c'_{-n+2}}{z^{n-2}} + \cdots$$

Ma lo sviluppo di serie di Laurent $e^{1/z}$ nell'intorno dell'origine, contiene infiniti termini con potenze negative di z, quindi siamo arrivati ad un assurdo. Di conseguenza la singolarità di f in $z = 0$ è essenziale.

(2) (4 pt). Calcolare

$$(a)\quad \int_{|z|=3/2} \frac{\cot(\pi z)}{(z-1/4)^2}\, dz \qquad\qquad (b)\quad \int_{|z|=1} \frac{z^2(2z^2+3)}{3z^5+1}\, e^{1/z}\, dz$$

Schema di soluzione.

(a) Le singolarità dell'integrando sono

$$\begin{array}{llll} z - \dfrac{1}{4} = 0 & \Longrightarrow & z = \dfrac{1}{4} & \text{polo di ordine 2} \\ \sin(\pi z) = 0 & \Longrightarrow & z = n \in \mathbb{Z} & \text{polo semplice}\,. \end{array}$$

Le singolarità che si trovano all'interno del cammino di integrazione sono

$$-1,\ 0,\ 1,\ 1/4\,.$$

Si ha inoltre, ponendo $f(z) = \cot(\pi z)/(z - 1/4)^2$,

$$\operatorname{Res}(f, 1/4) = -2\pi \qquad\qquad \operatorname{Res}(f, n) = \frac{1}{\pi(n-1/4)^2},\ n \in \mathbb{Z}\,.$$

Si ottiene quindi

$$\int_{|z|=3/2} \frac{\cot(\pi z)}{(z-1/4)^2}\, dz = 2\pi i\, [\operatorname{Res}(f, 1/4) + \operatorname{Res}(f, 0) + \operatorname{Res}(f, 1) = \operatorname{Res}(f, -1)]$$
$$= i \left[32 \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} \right) - 4\pi^2 \right]\,.$$

(b) Sia

$$f(z) := \frac{z^2(2z^2+3)}{3z^5+1}\, e^{1/z}\,.$$

Poichè non ci sono singolarità all'esterno del cammino di integrazione posso scrivere, ponendo

$$I := \int_{|z|=1} f(z)\, dz = -2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty) = 2\pi i \operatorname{Res}\Big[\frac{1}{z^2} f\Big(\frac{1}{z}\Big), 0\Big] = \frac{4\pi i}{3}\,.$$

(3) (3 pt). Calcolare

$$\int_0^\infty \frac{\cos(2x)}{(x^2+9)^2}\, dx$$

Risp: $\frac{7\pi}{108} e^{-6}$.

(4) (6 pt). Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato (n è un intero positivo)

$$(a)\quad D^3\big(x\,e^{-|x|}\big) \qquad\qquad (b)\quad D^4\big[\cos(x^2)\,\delta_0''\big] \qquad\qquad (c)\quad x^{n-1}\,\delta_0^{(n)}$$

Soluzione. (a)

$$\begin{aligned} D^3\big(x\,e^{-|x|}\big) &= D^2\left(e^{-|x|}(-\operatorname{sgn}(x)x+1)\right) = D^2\left(e^{-|x|}(1-|x|)\right) \\ &= D\left(e^{-|x|}\big[(|x|-1)\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} x)\big]\right) = D\left(e^{-|x|}(x-2\operatorname{sgn} x)\right) \\ &= e^{-|x|}(-|x|+2+1-4\delta_0) = e^{-|x|}(3-|x|) - 4e^{-|x|}\delta_0 \\ &= e^{-|x|}(3-|x|) - 4\delta_0\,. \end{aligned}$$

(b) Sia $h(x) = \cos(x^2)$. Allora

$$\begin{aligned} h(x) &= \cos(x^2) & h(0) &= 1 \\ h'(x) &= -2x\sin(x^2) & h'(0) &= 0 \\ h''(x) &= -4x^2\cos(x^2) - 2\sin(x^2) & h''(0) &= 0\,. \end{aligned}$$

Quindi abbiamo

$$\cos(x^2)\,\delta_0'' = h(x)\,\delta_0'' = \binom{2}{0}h(0)\,\delta_0'' - \binom{2}{1}h'(0)\,\delta_0' + \binom{2}{2}h''(0)\,\delta_0 = \delta_0''\,.$$

Di conseguenza

$$D^4\big[\cos(x^2)\,\delta_0''\big] = \delta_0^{(6)}\,.$$

(c)

Soluzione. Usando la formula generale per l'espansione di $h(x)\delta_0^{(n)}$ si ottiene

$$x^{n-1}\delta_0^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}D^k(x^{n-1})(0)\,\delta_0^{(n-k)}\,.$$

L'unico termine diverso da zero è quello con $k = n-1$, quindi

$$x^{n-1}\delta_0^{(n)} = (-1)^{n-1}n(n-1)!\,\delta_0' = (-1)^{n-1}n!\,\delta_0'\,.$$

(5) (6 pt). Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni, riconducendosi, se possibile, a casi noti (H è la funzione a gradino di Heaviside)

$$(a)\quad f(x) = e^{-4x^2+4x} \qquad\qquad (b)\quad f(x) = x\,e^{-x^2/2} \qquad\qquad (c)\quad f(x) = e^{2-x}H(x-3)$$

Soluzione. (a) Sia $\gamma(x) := e^{-x^2}$. Allora

$$f(x) = e^{-4x^2+4x} = e\,e^{-4x^2+4x+1} = e\,\gamma[2(x-1/2)]\,.$$

Quindi

$$\hat{f}(\lambda) = e\,e^{-i\lambda/2}\,\frac{1}{2}\hat{\gamma}(\lambda/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-i\lambda/2}\,e^{-\lambda^2/16+1}\,.$$

(b)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x\,e^{-x^2/2}](\lambda) &= i\,\frac{d}{d\lambda}\mathcal{F}[e^{-x^2/2}](\lambda) = \\ &= i\,\frac{d}{d\lambda}\mathcal{F}[\gamma(x/\sqrt{2})](\lambda) \\ &= i\sqrt{2\pi}\,\frac{d}{d\lambda}e^{-\lambda^2/2} \\ &= -i\lambda\,\sqrt{2\pi}\,e^{-\lambda^2/2}\,.\end{aligned}$$

(c) Sia $g(x) = e^{-x}H(x)$

$$f(x) = e^{2-x}H(x-3) = \frac{1}{e}\,e^{-(x-3)}H(x-3) = \frac{1}{e}\,g(x-3)\,.$$

Quindi

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{e}\,e^{-i3\lambda}\,\hat{g}(\lambda) = \frac{1}{e}\,e^{-i3\lambda}\,\frac{1}{1+i\lambda} = \frac{e^{-i3\lambda-1}}{1+i\lambda}\,.$$

(6) (2 pt). Sapendo che

$$\mathcal{F}\left[xe^{-(x^2-x)}\right](t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-(t+i)^2/4}\,(1-it)$$

calcolare

$$\mathcal{F}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-(x+i)^2/4}\,(1-ix)\right](t)\,.$$

Soluzione. Dal teorema di inversione segue che

$$\mathcal{F}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-(x+i)^2/4}\,(1-ix)\right](t) = 2\pi\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-(x+i)^2/4}\,(1-ix)\right](-t) = -2\pi\,t\,e^{-(t^2+t)}\,.$$

(7) (3 pt). Sia F una distribuzione su $\mathcal{K}$ tale che $x^n F = 0$ per un qualche intero positivo n. Dimostrare che F "ha supporto in 0", vale a dire dimostrare che se $f \in \mathcal{K}$ è nulla al di fuori di un intervallo chiuso che non contiene l'origine, allora $F(f) = 0$.

Soluzione. La spiego a voce su richiesta.