Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S1

Filippo Cesi – 2011–12

Nome	
Cognome	

Devo verbalizzare questo esame come (fare una croce):

6 CFU	8 CFU	4 + 6 CFU
altro:		

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
test	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (4 pt). Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$(a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n!}{n^n}\right)^2 z^n \qquad\qquad (b)\quad \sum_{n=0}^{\infty} (i-3)^n\, e^{-\sqrt{n}}\, z^{2n}$$

Risp: (a) e^2. (b) $1/\sqrt[4]{10}$.

(2) (3 pt). Sia $z = i\sqrt{3} - 1$. Usando il ramo principale, calcolare le seguenti espressioni (il risultato deve essere un numero palesemente reale!)

$$(a)\quad \mathrm{Re}(z^{10}) \qquad\qquad (b)\quad |(-i)^z| \qquad\qquad (c)\quad \mathrm{Arg}(z^i)$$

Risp: (a) $-2^9 = -512$. (b) $e^{\pi\sqrt{3}/2}$. (c) $\log 2$.

(3) (6 pt). Determinare tutte le singolarità isolate, la loro natura, e, per i poli, trovare l'ordine.

$$(a)\quad \frac{e^{i\pi z/3} - 1}{z\,(z^2+4)^2\,(z-6)^3} \qquad\qquad (b)\quad \frac{1}{e^{\sin z}} \qquad\qquad (c)\quad \frac{1}{\sin(z^2)}\,.$$

Soluzione. (a) Si tratta del quoziente di due funzioni analitiche. Quindi le uniche singolarità sono i punti in cui si annulla il denominatore. Gli zeri del denominatore sono:

0	molteplicità 1
$\pm\, 2i$	molteplicità 2
6	molteplicità 3 .

Ora devo controllare se il numeratore ha zeri che coincidono con quelli del denominatore. Sia $N(z) := e^{i\pi z/3} - 1$. Risolvendo $N(z) = 0$ si trova

$$\frac{\pi z}{3} = 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}\,,$$

quindi abbiamo i seguenti zeri del numeratore

$$z_k = 6k \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Poichè

$$N'(z_k) = \frac{i\pi}{3}\, e^{i\pi z_k/3} = \frac{i\pi}{3} \neq 0\,,$$

gli zeri del numeratore sono semplici. In particolare, quindi il numeratore ha zeri semplici in $z = 0$ e $z = 6$. Combinando le informazioni sul numeratore con quelle sul denominatore, ottengo che le singolarità di f sono

$z = 0$	eliminabile
$z = \pm 2i$	polo di ordine 2
$z = 6$	polo di ordine 2 .

(b) Poichè l'esponenziale è una funzione analitica che non si annulla mai, la funzione non ha singolarità.

(c) Le uniche singolarità sono i punti in cui si annulla il denominatore $D(z) = \sin(z^2)$. Gli zeri del denominatore sono:

$$z^2 = k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}\,,$$

Caso 1. Se $k = 0$, allora $z = 0$. Poichè

$$\begin{aligned} D'(0) &= \left[\cos(z^2)\,2z\right]_{z=0} = 0 \\ D''(0) &= \left[-\sin(z^2)\,4z^2 + 2\cos(z^2)\right]_{z=0} = 2 \neq 0 \end{aligned}$$

il punto $z = 0$ è uno zero di molteplicità 2 di $D(z)$.

Caso 2. Se $k > 0$, allora $z = \pm\sqrt{k\pi}$. Poichè

$$D'(\pm\sqrt{k\pi}) = \left[\cos(z^2)\,2z\right]_{z=\pm\sqrt{k\pi}} = (-1)^k\,(\pm 2\sqrt{k\pi}) \neq 0$$

si tratta di zeri semplici.

Caso 3. Se $k < 0$, allora $z = \pm i\sqrt{|k|\pi}$. Poichè

$$D'(\pm i\sqrt{|k|\pi}) = \left[\cos(z^2)\,2z\right]_{z=\pm i\sqrt{|k|\pi}} = (-1)^k\,(\pm 2i\sqrt{|k|\pi}) \neq 0$$

si tratta di zeri semplici.

Riassumendo, le singolarità della funzione $1/\sin(z^2)$ sono

$z = 0$		polo di ordine 2
$z = \pm\sqrt{k\pi}$	$k = 1, 2, 3, \ldots$	polo di ordine 1
$z = \pm i\sqrt{k\pi}$	$k = 1, 2, 3, \ldots$	polo di ordine 1 .

(4) (6 pt). Calcolare

$$(a) \quad \int_{|z|=4} \frac{e^z\,(z+\pi)}{z\,\sin z}\,dz \qquad\qquad (b) \quad \int_{|z|=1} \frac{z^2\,\cos(1/z)}{1+3z}\,dz$$

Schema di soluzione. (a) Sia

$$f(z) := \frac{e^z\,(z+\pi)}{z\,\sin z}\,.$$

Le singolarità di f che si trovano all'interno del cammino di integrazione sono

$z = 0$	polo di ordine 2
$z = -\pi$	eliminabile
$z = +\pi$	polo di ordine 1 .

Quindi

$$\int_{|z|=4} f(z)\,dz = 2\pi i\left[\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,\pi)\right] = 2\pi i\left[(1+\pi) - 2e^{\pi}\right].$$

(b) Sia

$$f(z) := \frac{z^2\,\cos(1/z)}{1+3z}\,.$$

Poichè non ci sono singolarità all'esterno del cammino di integrazione posso usare il metodo del residuo all'infinito. In questo modo si ottiene facilmente

$$\int_{|z|=1} f(z)\,dz = -2\pi i\,\mathrm{Res}(f,\infty) = 2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right] = -\frac{i7\pi}{27}\,.$$

(5) (4 pt). Calcolare il seguente integrale esprimendo il risultato in termini di quantità palesemente reali.

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{x^2+6x+18}$$

Schema di soluzione. Denotando con $[z^\alpha]^+$ il ramo "+" di z^α, vale a dire quello con il taglio lungo il semiasse reale positivo, ottengo

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{x^2+6x+18} &= \frac{2\pi i}{1-e^{i\pi}}\left[\mathrm{Res}(f,-3+3i)+\mathrm{Res}(f,-3-3i)\right] \\
&= \frac{2\pi i}{2}\,\frac{\left[(-3+3i)^{1/2}\right]^+ - \left[(-3-3i)^{1/2}\right]^+}{6i} \\
&= \frac{\pi\sqrt{3}\sqrt[4]{2}}{6}\left(e^{i3\pi/8}-e^{i5\pi/8}\right) \\
&= \frac{\pi\sqrt[4]{2}}{2\sqrt{3}}\left(e^{i3\pi/8}-e^{i5\pi/8}\right)\frac{e^{-i\pi/2}}{e^{-i\pi/2}} \\
&= \frac{\pi\sqrt[4]{2}}{2\sqrt{3}}\,\frac{e^{-i\pi/8}-e^{i\pi/8}}{-i} \\
&= \frac{\pi\sqrt[4]{2}}{\sqrt{3}}\,\frac{e^{i\pi/8}-e^{-i\pi/8}}{2i} = \frac{\pi\sqrt[4]{2}}{\sqrt{3}}\sin(\pi/8)\,.
\end{aligned}$$

(6) (4 pt). Sia $f(x) = I_{[e,\pi]}$ la funzione caratteristica dell'intervallo $[e,\pi]$, vale a dire

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [e,\pi] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Lo sviluppo di f in serie di Fourier in $[-\pi,\pi]$ è dato da

$$f(x) \sim \frac{\pi-e}{2\pi} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \left[\frac{\sin(ke)}{k}\cos(kx) - \frac{\cos(ke)-(-1)^k}{k}\sin(kx)\right] \qquad x \in [-\pi,\pi]$$

Calcolare

$$(a)\ \sum_{k=1}^\infty \frac{\sin(ke)}{k} \qquad\qquad (b)\ \sum_{k=1}^\infty (-1)^k\frac{\sin(ke)}{k}$$

Soluzione. Sia $\tilde f$ il prolungamento periodico di f a tutto $\mathbb{R}$. Osservo che $\tilde f$ è differenziabile a tratti. Quindi so che la serie di Fourier di f converge puntualmente a $\tilde f(x)$ in tutti i punti in cui $\tilde f$ è continua e al valore $(\tilde f(x^+)+\tilde f(x^-))/2$ nei punti in cui $\tilde f$ non è continua.

(a) Nel punto $x=0$ la funzione $\tilde f$ è continua. Dalla convergenza puntuale ottengo.

$$0 = f(0) = \tilde f(0) = \frac{\pi-e}{2\pi} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \frac{\sin(ke)}{k}\,.$$

Quindi

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{\sin(ke)}{k} = \frac{\pi-e}{2}\,.$$

(b) Nel punto $x = \pi$ la funzione $\tilde{f}$ è discontinua. Dalla convergenza puntuale ottengo.

$$\frac{1}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2} = \frac{\tilde{f}(\pi^+) + \tilde{f}(\pi^-)}{2} = \frac{\pi - e}{2\pi} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \, \frac{\sin(ke)}{k} \, .$$

Quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \, \frac{\sin(ke)}{k} = \frac{\pi - e}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{e}{2} \, .$$

(7) (4 pt). Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni, riconducendosi, se possibile, a casi noti (H è la funzione a gradino di Heaviside).

$$(a) \quad x^2 \, e^{-|x|} \qquad\qquad (b) \quad e^{3x+2} \, H(1-x) \, .$$

Soluzione. (a) Sia $g(x) := e^{-|x|}$. So che $\hat{g}(\lambda) = 2/(1+\lambda^2)$. Quindi

$$\hat{f}(\lambda) = \mathcal{F}[x^2 \, g(x)](\lambda) = i^2 \, D^2 \, [\hat{g}(\lambda)] = -D^2 \left[\frac{2}{1+\lambda^2} \right] = \frac{4(1-3\lambda^2)}{(\lambda^2+1)^3} \, .$$

(b) Sia $\tilde{f}(x) := f(-x)$. Quindi

$$\tilde{f}(x) = e^{-3x+2} \, H(x+1) = e^5 \, e^{-3(x+1)} \, H(x+1) \, .$$

Ponendo $h(x) := e^{-3x} \, H(x)$ si ha

$$\tilde{f}(x) := e^5 \, h(x+1) \, .$$

Di conseguenza

$$\mathcal{F}[\tilde{f}(x)](\lambda) = e^5 \, \mathcal{F}[h(x+1)](\lambda) = e^5 \, e^{i\lambda} \, \hat{h}(\lambda) = \frac{e^{5+i\lambda}}{3+i\lambda} \, .$$

Infine, usando la regola dell'inversione, si ottiene

$$\hat{f}(\lambda) = \mathcal{F}[f(x)](\lambda) = \mathcal{F}[\tilde{f}(-x)](\lambda) = \mathcal{F}[\tilde{f}(x)](-\lambda) = \frac{e^{5-i\lambda}}{3-i\lambda} \, .$$

(8) (6 pt). Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato

$$(a) \quad D^4 \left[e^{x+1} \, D^4(|x|) \right] \qquad\qquad (b) \quad D^2(|\cos x|) \, .$$

Risp: (a) $2e \left(\delta_0^{(4)} - 2\delta_0^{(5)} + \delta_0^{(6)} \right)$. (b) $-|\cos x| + 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{(k+1/2)\pi}$.

(9) (4 pt). Calcolare il seguente integrale scritto nella notazione "dei fisici", in cui compare la "funzione composta della delta di Dirac", semplificando il più possibile il risultato.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi x) \, \delta((x-1)(e^x-1)) \, dx \, .$$

Soluzione. Sia $b(x) := (x-1)\,(e^x-1)$. La funzione b si annulla in $x=0$ e $x=1$. Inoltre

$$b'(x) = e^x - 1 + e^x(x-1) = xe^x - 1 \, .$$

Dunque

$$b'(0) = -1 \qquad\qquad b'(1) = e - 1\,.$$

Per definizione di funzione composta della delta di Dirac, otteniamo

$$\delta(b(x)) = \frac{\delta_0}{|b'(0)|} + \frac{\delta_1}{|b'(1)|} = \delta_0 + \frac{\delta_1}{e-1}\,.$$

In questo modo si ottiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi x)\,\delta((x-1)(e^x-1))\,dx = \cos(0) + \frac{1}{e-1}\cos(\pi) = 1 - \frac{1}{e-1} = \frac{e-2}{e-1}\,.$$

(10) (4 pt). Si consideri la distribuzione $\varphi = \mathrm{sgn}(x)\,e^{-x^2}$. Calcolare $D^6\,[\varphi' + 2x\varphi]$.

Soluzione. Poichè

$$\varphi' = 2\delta_0\,e^{-x^2} + \mathrm{sgn}(x)e^{-x^2}(-2x) = 2\delta_0 + \mathrm{sgn}(x)e^{-x^2}(-2x) = -2x\varphi + 2\delta_0\,,$$

otteniamo

$$D^6\left[\varphi' + 2x\varphi\right] = D^6[2\delta_0] = 2\,\delta_0^{(6)}\,.$$

(11) (4 pt). Siano $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ due funzioni che soddisfano la relazione $f''(x) = x\,g(2x)$. Quale relazione lega le rispettive trasformate di Fourier $\hat{f}$ e $\hat{g}$?

Soluzione. Applicando la trasformata di Fourier all'identità $f''(x) = xg(2x)$ si ottiene

$$(i\lambda)^2\hat{f}(\lambda) = \mathcal{F}[xg(2x)](\lambda) = iD\mathcal{F}[g(2x)](\lambda) = iD\left[\frac{1}{2}\,\hat{g}(\lambda/2)\right] = \frac{i}{4}\hat{g}'(\lambda/2)\,.$$

Quindi

$$\hat{g}'(\lambda) = 16i\lambda^2\,\hat{f}(2\lambda)\,.$$

(12) (5 pt). Sapendo che $\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$, calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = 1/\sqrt{|x|}$ (sugg: sfruttare la parità di f ed usare un opportuno cambio di variabile).

Soluzione. Poichè $f(x) := 1/\sqrt{|x|}$ è pari si ha

$$\hat{f}(\lambda) := \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\lambda x}}{\sqrt{|x|}}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(\lambda x)}{\sqrt{|x|}}\,dx = 2\int_0^\infty \frac{\cos(\lambda x)}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_0^\infty \frac{\cos(|\lambda| x)}{\sqrt{x}}\,dx\,.$$

Effettuando, nell'ultimo integrale, la sostituzione

$$y = \sqrt{|\lambda| x} \qquad\qquad dy = \frac{|\lambda|\,dx}{2\sqrt{|\lambda| x}} = \frac{\sqrt{|\lambda|}\,dx}{2\sqrt{x}}\,,$$

si ottiene

$$\hat{f}(\lambda) = 2\int_0^\infty \cos(y^2)\,\frac{2dy}{\sqrt{|\lambda|}} = \frac{4}{\sqrt{|\lambda|}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{|\lambda|}}\,.$$