Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S2

Filippo Cesi – 2011–12

Nome	
Cognome	

Devo verbalizzare questo esame come (fare una croce):

6 CFU	8 CFU	4 + 6 CFU
altro:		

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
test	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (6 pt). Calcolare il raggio di convergenza delle serie di potenze

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^{\sqrt{n}}\, z^n \qquad\qquad (b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (1-2i)^n\, e^{-n}\, z^{2n}$$

Soluzione. (a) Sia $a_n := (\log n)^{\sqrt{n}}$. Allora

$$|a_n|^{1/n} = |(\log n)^{\sqrt{n}}|^{1/n} = (\log n)^{1/\sqrt{n}} = \exp\left[\frac{1}{\sqrt{n}} \log\log n\right] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1\,.$$

Quindi il raggio di convergenza è 1.

(b) Sia $a_n := (1-2i)^n\, e^{-n}$. Allora

$$R^{-1} = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/2n} = \lim_{n\to\infty} \left|(1-2i)^n\, e^{-n}\right|^{1/2n} = |(1-2i)|^{1/2}\, e^{-1/2} = \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{e}}\,.$$

Quindi

$$R = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt[4]{5}}\,.$$

(2) (3 pt). Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $z^i = 1+i$ (usare il ramo principale per definire la potenza). Quante di queste soluzioni appartengono all'insieme $\{z \in \mathbb{C} : 1 \le |z| \le e^{10\pi}\}$?

Risp: Le soluzioni sono

$$z_k = \exp\bigl[\pi/4 + 2k\pi - i\log 2/2\bigr] \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Le soluzioni che appartengono all'insieme $\{z \in \mathbb{C} : 1 \le |z| \le e^{10\pi}\}$ sono 5: z_0, z_1, z_2, z_3, z_4.

(3) (6 pt). Determinare le singolarità isolate, la loro natura, e, per i poli, trovare l'ordine.

$$(a) \quad \frac{(z+1)^2\,(z^2-9)}{1+\cos(\pi z)} \qquad\qquad (b) \quad \frac{\exp(1/z^2)}{z^2(z^2+1)}$$

Soluzione. (a) Numeratore e denominatore sono funzioni intere, quindi il quoziente è analitico ovunque tranne quando si annulla il denominatore. Cerco gli zeri del denominatore

$$\begin{aligned} D(z) &:= 1+\cos(\pi z) = 0 \\ \pi z &= (2k+1)\pi \qquad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

L'insieme delle singolarità è dato da tutti gli interi dispari

$$S := \{z_k = 2k+1 : k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Poichè

$$\begin{aligned} D'(z_k) &= -\pi \sin(\pi z_k) = 0 \\ D''(z_k) &= -\pi^2 \cos(\pi z_k) = \pi^2 \neq 0\,, \end{aligned}$$

posso affermare che

$$z_k = 2k+1 \text{ è uno zero di molteplicità 2 di } D(z) \text{ per ogni } k \in \mathbb{Z}\,. \tag{0.1}$$

D'altra parte, per quanto riguarda il numeratore $N(z)$, si ha evidentemente

$$\begin{aligned} &z = -1 \text{ è uno zero di molteplicità 2 di } N(z) \\ &z = 3 \text{ e } z = -3 \text{ sono zeri di molteplicità 1 di } N(z) \end{aligned} \tag{0.2}$$

Usando le informazioni sugli zeri del denominatore e del numeratore, si ottiene, per quanto riguarda il quoziente $f(z) = N(z)/D(z)$,

$$\begin{aligned}
&z = -1 \text{ è una singolarità eliminabile di } f\\
&z = 3 \text{ e } z = -3 \text{ sono poli di ordine 1 di } f\\
&\text{tutti gli altri interi dispari sono poli di ordine 2 di } f.
\end{aligned}$$

(b). Risposta:

$$\begin{aligned}
&z = 0 \text{ è una singolarità essenziale}\\
&z = i \text{ e } z = -i \text{ sono poli di ordine 1.}
\end{aligned}$$

(4) (6 pt). Calcolare

$$(a) \quad \int\limits_{|z-3i|=4} \frac{dz}{z\,(e^z - 1)} \qquad\qquad (b) \quad \int\limits_{|z|=1} \frac{z(z+1)\,\exp(1/z)}{3z^3+1}\,dz$$

(a)

Schema di soluzione. Sia

$$f(z) = \frac{1}{z\,(e^z-1)}\,.$$

La funzione f ha le seguenti singolarità isolate

$$\begin{aligned}
&z_0 = 0 && \text{polo di ordine 2}\\
&z_k = i2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0 && \text{polo di ordine 1}
\end{aligned}$$

Le singolarità interne al cammino di integrazione sono $z_0 = 0$ e $z_1 = 2\pi i$. Si calcola facilmente

$$\operatorname{Res}(f,0) = -\frac{1}{2} \qquad\qquad \operatorname{Res}(f,2\pi i) = -\frac{i}{2\pi}\,.$$

Quindi

$$\int\limits_{|z-3i|=4} \frac{dz}{z\,(e^z-1)} = 2\pi i \left[\operatorname{Res}(f,0) + \operatorname{Res}(f,2\pi i)\right] = 1 - i\pi\,.$$

(b) Sia

$$f(z) := \frac{z(z+1)\,\exp(1/z)}{3z^3+1}\,.$$

La funzione integranda f ha una singolarità essenziale in $z = 0$ e tre poli semplici che si trovano sulla circonferenza di raggio $1/\sqrt[3]{3}$ centrata nell'origine. Poichè non ci sono singolarità all'esterno del cammino di integrazione posso usare il metodo del residuo all'infinito.

$$\int_{|z|=1} f(z)\,dz = -2\pi i \operatorname{Res}(f,\infty) = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right].$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) &= \frac{1}{z^2}\frac{1/z\,(1/z+1)\,\exp(z)}{3/z^3+1}\\
&= \frac{1}{z}\,\frac{(z+1)\,\exp(z)}{3+z^3}\,.
\end{aligned}$$

Questa funzione ha un polo semplice nell'origine e il residuo associato è

$$\operatorname{Res}\Big[\frac{1}{z^2} f\Big(\frac{1}{z}\Big), 0\Big] = \lim_{z\to 0} \frac{(z+1)\,\exp(z)}{3+z^3} = \frac{1}{3}\,.$$

Quindi

$$\int_{|z|=1} f(z)\,dz = \frac{2\pi i}{3}\,.$$

(5) (4 pt). Calcolare il seguente integrale esprimendo il risultato in termini di quantità palesemente reali.

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+4)^2}\,dx$$

Risp: $\frac{3\pi}{32e^2}$.

(6) (4 pt). Lo sviluppo in serie di Fourier in $[-\pi,\pi]$ della funzione $f(x) := e^{2x}$ è dato da

$$e^{2x} \sim \frac{\sinh(2\pi)}{2\pi} + \sum_{k=1}^\infty \left[\frac{4(-1)^k \sinh(2\pi)}{\pi\,(k^2+4)} \cos(kx) - \frac{2(-1)^k k \sinh(2\pi)}{\pi\,(k^2+4)} \sin(kx)\right].$$

Sfruttando opportunamente il teorema sulla convergenza puntuale della serie di Fourier, calcolare la somma delle seguenti serie

$$(a)\quad \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k^2+4} \qquad\qquad (b)\quad \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2+4}\,.$$

Sia $\tilde f$ il prolungamento periodico di f a tutto $\mathbb{R}$. Osservo che $\tilde f$ è differenziabile a tratti. Quindi so che la serie di Fourier di f converge puntualmente a $\tilde f(x)$ in tutti i punti in cui $\tilde f$ è continua e al valore $(\tilde f(x^+) + \tilde f(x^-))/2$ nei punti in cui $\tilde f$ non è continua.

(a) Nel punto $x = 0$ la funzione $\tilde f$ è continua. Dalla convergenza puntuale ottengo.

$$1 = e^0 = f(0) = \tilde f(0) = \frac{\sinh(2\pi)}{2\pi} + \sum_{k=1}^\infty \frac{4(-1)^k \sinh(2\pi)}{\pi\,(k^2+4)}\,.$$

Quindi

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k^2+4} = \frac{\pi}{4\sinh(2\pi)} - \frac{1}{8}\,.$$

(b) Nel punto $x = \pi$ la funzione $\tilde f$ è discontinua e si ha

$$\frac{\tilde f(\pi^+) + \tilde f(\pi^-)}{2} = \frac{e^{-2\pi} + e^{2\pi}}{2} = \cosh(2\pi).$$

Dalla convergenza puntuale ottengo dunque

$$\begin{aligned}
\cosh(2\pi) &= \frac{\tilde f(\pi^+) + \tilde f(\pi^-)}{2} \\
&= \frac{\sinh(2\pi)}{2\pi} + \sum_{k=1}^\infty \frac{4(-1)^k \sinh(2\pi)}{\pi\,(k^2+4)} \cos(k\pi) \\
&= \frac{\sinh(2\pi)}{2\pi} + \sum_{k=1}^\infty \frac{4 \sinh(2\pi)}{\pi\,(k^2+4)}\,.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+4} = \frac{\pi}{4}\cot(2\pi) - \frac{1}{8}\,.$$

(7) (6 pt). Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni, riconducendosi, se possibile, a casi noti

$$(a)\quad \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \qquad\qquad (b)\quad xe^{-|2x+1|}\,.$$

Soluzione. (a) Sia $f(x) := \frac{x^2}{(1+x^2)^2}$. Ponendo

$$h(x) := \frac{1}{1+x^2}\,,$$

si ha

$$h'(x) := \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\,,$$

quindi

$$f(x) = -\frac{1}{2} x h'(x)\,.$$

Utilizzando le proprietà della trasformata di Fourier si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(x)](\lambda) &= -\frac{1}{2}\,\mathcal{F}[xh'(x)](\lambda) = -\frac{i}{2}\,D\mathcal{F}[h'(x)](\lambda)\\
&= -\frac{i}{2}\frac{d}{d\lambda}\big(i\lambda\mathcal{F}[h(x)](\lambda)\big)\\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{d\lambda}\big(\lambda\pi e^{-|\lambda|}\big)\\
&= \frac{\pi}{2}\left(e^{-|\lambda|} - \lambda e^{-|\lambda|}\operatorname{sgn}(\lambda)\right)\\
&= \frac{\pi}{2}\,e^{-|\lambda|}\,(1-|\lambda|)\,.
\end{aligned}$$

(b) Sia $f(x) := xe^{-|2x+1|}$. Ponendo

$$h(x) := e^{-|x|}$$

si ha

$$f(x) = x\,h(2x+1)\,.$$

Utilizzando le proprietà della trasformata di Fourier si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(x)](\lambda) &= \mathcal{F}[xh(2x+1)](\lambda) = i\frac{d}{d\lambda}\mathcal{F}[h(2x+1)](\lambda)\\
&= i\frac{d}{d\lambda}\Big(e^{i\lambda/2}\frac{1}{2}\mathcal{F}[h(x)](\lambda/2)\Big) = i\frac{d}{d\lambda}\left(e^{i\lambda/2}\frac{1}{2}\frac{2}{1+(\lambda/2)^2}\right)\\
&= 4i\frac{d}{d\lambda}\frac{e^{i\lambda/2}}{4+\lambda^2} = 4ie^{i\lambda/2}\left[\frac{i/2}{4+\lambda^2} - \frac{2\lambda}{(4+\lambda^2)^2}\right]\\
&= 4i\frac{e^{i\lambda/2}}{4+\lambda^2}\left[\frac{i}{2} - \frac{2\lambda}{4+\lambda^2}\right] = 2i\frac{e^{i\lambda/2}}{4+\lambda^2}\left[i - \frac{4\lambda}{4+\lambda^2}\right]\\
&= 2i\frac{e^{i\lambda/2}}{(4+\lambda^2)^2}\left[4i + i\lambda^2 - 4\lambda\right]\\
&= -2\frac{e^{i\lambda/2}}{(4+\lambda^2)^2}\left[\lambda^2 + 4i\lambda + 4\right]\,.
\end{aligned}$$

(8) (4 pt). Sia $\hat{f}$ la trasformata di Fourier della funzione f. Senza dover calcolare $\hat{f}$, è possibile affermare che $\hat{f}$ è di classe C^p e che $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^q \hat{f}(\lambda) = 0$, in cui p e q valgono ...

$$f(x) = \begin{cases} \cos^3(x) & \text{se } x \in [-\pi/2, \pi/2] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Schema di soluzione. La funzione f è continua a supporto compatto, quindi $x^k f \in L_1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Di conseguenza $\hat{f} \in C^\infty$.

Inoltre, si vede facilmente che f, f' e f'' sono continue, mentre $f^{(3)}$ è continua a tratti. Dal teorema che lega regolarità e andamento all'infinito di una funzione e della sua trasfromata di Fourier segue che $\hat{f}(\lambda)$ tende a zero quando $\lambda \to \infty$ più velocemente di $1/\lambda^3$. Vedi, per i dettagli, la soluzione di un problema quasi identico in 10-11/S2.

(9) (6 pt). Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato ($\lfloor x \rfloor$ è la parte intera di x, cioè il più grande numero intero minore od uguale ad x)

$$(a)\quad D^4\big(e^{2x}\,\delta_0^{(3)}\big) \qquad\qquad (b)\quad D^3\big(x \sin|x|\big) \qquad\qquad (c)\quad D\big(\sin(\pi x)\lfloor x \rfloor\big)\,.$$

Soluzione. (a) Si ha

$$\begin{aligned} e^{2x}\,\delta_0^{(3)} &= \binom{3}{0} e^0\,\delta_0^{(3)} - \binom{3}{1}\big[De^{2x}\big]_{x=0}\,\delta_0'' + \binom{3}{2}\big[D^2e^{2x}\big]_{x=0}\,\delta_0' - \binom{3}{3}\big[D^3e^{2x}\big]_{x=0}\,\delta_0 \\ &\delta_0^{(3)} - 6\,\delta_0'' + 12\,\delta_0' - 8\delta_0\,. \end{aligned}$$

Quindi

$$D^4\big(e^{2x}\,\delta_0^{(3)}\big) = \delta_0^{(7)} - 6\,\delta_0^{(6)} + 12\,\delta_0^{(5)} - 8\delta_0^{(4)}\,.$$

(b) Ricordo che il coseno è una funzione pari e che quindi $\cos|x| = \cos x$, mentre il seno è dispari e quindi $\sin|x| = \sin x \operatorname{sgn} x$. Posso quindi scrivere

$$\begin{aligned} D\big(x\sin|x|\big) &= \sin|x| + x\cos|x| \operatorname{sgn} x = \sin|x| + |x|\cos x \\ D^2\big(x\sin|x|\big) &= 2\cos x \operatorname{sgn} x - |x|\sin x \\ D^3\big(x\sin|x|\big) &= -2\sin x \operatorname{sgn} x + 4\cos x\delta_0 - \operatorname{sgn} x \sin x - |x|\cos x \\ &= -3\sin x \operatorname{sgn} x + 4\delta_0 - |x|\cos x \\ &= 4\delta_0 - 3\sin|x| - |x|\cos x\,. \end{aligned}$$

(c) Usando la regola di derivazione di un prodotto fra una distribuzione e una funzione C^∞, si ottiene

$$D[\sin(\pi x)\lfloor x \rfloor] = \pi\cos(\pi x)\lfloor x \rfloor + \sin(\pi x)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_k = \pi\cos(\pi x)\lfloor x \rfloor + \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sin(k\pi)\delta_k = \pi\cos(\pi x)\lfloor x \rfloor$$

(10) (4 pt). Calcolare il seguente integrale scritto nella notazione "dei fisici", semplificando il più possibile il risultato.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,\delta(\sin(ax))\,dx \qquad a \in \mathbb{R},\ a > 0\,.$$

Soluzione. La funzione $b(x) := \sin(ax)$ si annulla nei punti

$$\sin(ax) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x_k = \frac{k\pi}{a} \text{ con } k \in \mathbb{Z}\,.$$

Poichè

$$|b'(x_k)| = |a\ \cos(2x_k)| = |a \cos(k\pi)| = |a\,(-1)^k| = a\,,$$

si ottiene

$$\delta(\sin(ax)) = \frac{1}{a}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{\kappa\pi/a}\,.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,\delta(\sin(ax))\,dx &= \frac{1}{a}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,\delta(x-\kappa\pi/a)\,dx \\
&= \frac{1}{a}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-|k\pi/a|} = \frac{1}{a}\Big(1+2\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k\pi/a}\Big) \\
&= \frac{1+e^{-\pi/a}}{a(1-e^{-\pi/a})}\,.
\end{aligned}$$

(11) (5 pt). Sia $F \in \mathcal{K}^*$ una distribuzione tale che $F' = 0$. Si dimostri che F è costante, vale a dire che esiste $c \in \mathbb{C}$ tale che

$$F(f) = c\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx \qquad \forall f \in \mathcal{K}\,.$$

[Sugg: sia γ una qualsiasi funzione C^∞ a supporto compatto che soddisfa la condizione $\int_{\mathbb{R}}\gamma(x)\,dx = 1$. Si consideri la funzione

$$h(x) := \int_{-\infty}^{x} [f(t) - k\gamma(t)]\,dt\,,$$

in cui $k \in \mathbb{C}$ è una costante. A questo punto osservo che, se scelgo opportunamente il valore di k, posso affermare che…]

Soluzione. Spiego a voce a chi è interessato.